

МИНПРОМТОРГ РОССИИ  
Департамент судостроительной промышленности и морской техники  
ФГУП «Крыловский государственный научный центр»

*На правах рукописи*



Филатов Антон Романович

**МЕТОД ПРОЕКТИРОВАНИЯ СУДОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ С  
ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОМПЛЕКСНОГО ПОДХОДА К ОПТИМИЗАЦИИ  
ТОПОЛОГИИ, РАЗМЕРОВ И ФОРМЫ**

05.08.01 Теория корабля и строительная механика

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель:  
доктор технических наук,  
профессор  
Крыжевич Геннадий Брониславович

Санкт-Петербург – 2020

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1 АНАЛИЗ СОВРЕМЕННЫХ ПОДХОДОВ К ПРОЕКТИРОВАНИЮ КОНСТРУКЦИЙ И РАЗРАБОТКА МЕТОДА ПРОЕКТИРОВАНИЯ СУДОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ С КОМПЛЕКСНЫМ ПОДХОДОМ К ОПТИМИЗАЦИИ .....	9
1.1 Оптимизация при проектировании судовых конструкций.....	9
1.1.1 Задачи оптимизации в строительной механике корабля.....	9
1.1.2 Опыт использования топологической оптимизации в судостроении.....	10
1.1.3 Опыт использования топологической оптимизации в смежных отраслях.....	12
1.1.4 Обоснование поставленных целей и задач .....	15
1.2 Задача оптимизации и методы её решения .....	15
1.2.1 Параметрическая оптимизация .....	21
1.2.2 Топологическая оптимизация .....	28
1.2.3 Оптимизация формы.....	45
1.3 Разработка метода проектирования судовых конструкций на основе комплексного подхода к оптимизации.....	49
1.3.1 Алгоритм рационального проектирования судовых конструкций .....	49
1.3.2 Основные этапы алгоритма.....	50
2 РАЗРАБОТКА ЭФФЕКТИВНЫХ СПОСОБОВ ВАЛИДАЦИИ ПОЛУЧЕННЫХ ПРОЕКТНЫХ РЕШЕНИЙ .....	54
2.1 Проверка предельной прочности конструкций .....	54
2.1.1 Задача теории упругости .....	54
2.1.2 Теории прочности .....	58
2.1.3 Модели пластического упрочнения .....	62
2.1.4 Критерии разрушения.....	67
2.1.5 Алгоритм проверки предельной прочности .....	70
2.2 Проверка устойчивости конструкций.....	70
2.2.1 Линейная устойчивость .....	71
2.2.2 Нелинейная устойчивость .....	73
2.2.3 Алгоритм проверки устойчивости.....	73
2.3 Проверка усталостной прочности конструкций.....	75
2.3.1 Модели усталостной прочности .....	76
2.3.2 Методы сведения сложного напряжённого состояния к простому.....	87
2.3.3 Мера накопленных усталостных повреждений.....	95
2.3.4 Разработка метода проверки усталостной прочности .....	96

3	АПРОБАЦИЯ РАЗРАБОТАННОГО МЕТОДА ПРОЕКТИРОВАНИЯ СУДОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ.....	100
3.1	Оптимизация узла стыкового соединения алюминиевых панелей в составе корпуса высокоскоростного судна .....	100
3.1.1	Оценка эффективности рекомендуемого Правилами узла .....	101
3.1.2	Оптимизация подкрепляющего элемента .....	109
3.1.3	Оценка эффективности оптимизированного подкрепляющего элемента .....	117
3.1.4	Рекомендации по оформлению узла.....	120
3.2	Поиск новых технических решений крышки люкового закрытия сухогрузного судна	120
3.2.1	Прочность стальной конструкции крышки .....	122
3.2.2	Разработка алюминиевой конструкции крышки.....	125
3.2.3	Оценка эффективности разработанной алюминиевой конструкции крышки.....	133
3.2.4	Рекомендации по конструктивному оформлению крышек люковых закрытий....	133
3.3	Усиление ледового пояса морской ледостойкой стационарной платформы.....	133
3.3.1	Прочность традиционной конструкции перекрытия ледового пояса .....	134
3.3.2	Параметрическая оптимизация перекрытия ледового пояса .....	144
3.3.3	Прочность оптимизированной конструкции перекрытия ледового пояса .....	145
3.3.4	Оценка эффективности оптимизированной конструкции и рекомендации по конструктивному оформлению перекрытий ледовых поясов .....	152
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	154
	СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ .....	156
	СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	158
	ПРИЛОЖЕНИЕ А. ТЕКСТ ПРОГРАММЫ ОПТИМИЗАЦИИ ЛЕДОВОГО ПЕРЕКРЫТИЯ ..	172

## ВВЕДЕНИЕ

### Актуальность темы исследования

При создании нового проекта конструктор, как правило, ориентируется на ближайший прототип и выполняет его переработку под заданные в проекте технические и функциональные характеристики. При таком подходе вновь получаемые конструкции являются в некоторой степени повторением уже имеющихся аналогов и большинство отличий носят локальный характер. Плюсы традиционного подхода заключаются в надёжности получаемых конструкторских решений, имеющих основание на многолетнем накопленном опыте проектирования и эксплуатации. Минусы состоят, во-первых, в необходимости иметь тот самый накопленный опыт, что невозможно при создании принципиально новых изделий, и, во-вторых, в низкой вероятности появления прорывных конструкторских решений, которая больше всего зависит от творческих способностей самого конструктора. Исправить перечисленные недостатки в значительной степени можно с помощью топологической оптимизации – специального раздела математического программирования, связанного с поиском рационального распределения материала в заданной области пространства, что помогает компенсировать отсутствие конструкторского опыта при проектировании принципиально новых изделий и позволяет пересмотреть существующие технические решения. Работа направлена на создание метода проектирования судовых конструкций, стимулирующего разработку новых прорывных конструктивных решений.

### Степень разработанности темы исследования

Оптимизация при подборе прочных размеров связей в науке строительной механики корабля появляется уже на заре её становления в начале XX в. в классических трудах И.Г. Бубнова и П.Ф. Папковича, учеников акад. А.Н. Крылова. В течение всего XX в. широчайшее развитие получают различные методы математического программирования, позволяющие эффективно решать не только линейные, но и выпуклые, а также нелинейные задачи, которые находят своё применение в судостроении при решении задач параметрической оптимизации, касающейся не только подбора прочных размеров связей, но и снижения сопротивления судна, что отражено в работах А.А. Родионова, В.Н. Тряскина, М.Ю. Миронова и других отечественных учёных. Однако при выполнении параметрической оптимизации с большим числом параметров возникают существенные проблемы со сходимостью и сложности с поиском глобального экстремума, что ограничивает возможности её применения для поиска оптимальной топологии конструкции. В конце XX в. наблюдается мощный толчок в развитии методов топологической оптимизации, которая в начале XXI в. из теоретической дисциплины становится прикладной, что спровоцировало огромный интерес инженеров и конструкторов к её

применению при проектировании силовых конструкций, особенно в авиации и космонавтике, где наиболее остро стоит вопрос рационального использования каждого грамма материала. Помимо указанных отраслей промышленности применение топологической оптимизации наблюдается в строительстве, машиностроении, автомобилестроении, а в 2010-х гг. и в судостроении, но в весьма ограниченном числе исследовательских задач без дальнейшего практического применения при проектировании. Также в конце XX в. одновременно с топологической оптимизацией развивается направление оптимизации формы, основной целью которой является снижение концентрации напряжений в конструкции. На текущий момент использование оптимизации формы в судостроении не наблюдается, однако её применение позволит увеличить ресурс корпусных конструкций, что благоприятно отразится на стоимости и сроках ремонта судового корпуса. Вместе с тем отсутствует комплексный подход к оптимизации конструкций, сочетающий в себе три описанных выше вида оптимизации, который с использованием современных алгоритмов позволил бы в короткие сроки находить такие оптимальные решения, отыскание которых с применением традиционного подхода подчас невыполнимо.

#### Цели и задачи

Целью настоящей работы является разработка и апробация метода проектирования судовых конструкций с использованием комплексного подхода оптимизации топологии, размеров и формы.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- 1) формулировка задачи оптимизации на каждом этапе проектирования судовых конструкций;
- 2) анализ существующих методов математического программирования, включая подходы параметрической оптимизации, топологической оптимизации и оптимизации формы;
- 3) разработка рекомендаций по решению оптимизационных задач, включая методы решения и способы учёта ограничений;
- 4) формулировка алгоритма рационального проектирования судовых конструкций;
- 5) разработка эффективных способов валидации полученного оптимального проектного решения;
- 6) анализ существующих критериев предельной и усталостной прочности, а также устойчивости и разработка рекомендаций по их учёту при решении оптимизационных задач;
- 7) апробация разработанного метода проектирования судовых конструкций на конкретных примерах.

#### Научная новизна

Впервые разработан метод проектирования судовых конструкций, основанный на комплексном использовании трёх видов оптимизации: топологии, размеров и формы, что

позволяет проектировать рациональные конструкции, удовлетворяющие критериям как предельной, так и усталостной прочности, а также жёсткости, устойчивости и отстройке от резонансных частот.

Разработан новый метод расчёта многоциклового и малоциклового усталости судовых конструкций, содержащий алгоритмы, учитывающие трёхосность напряжённо-деформированного состояния в узлах, что повышает точность расчётных оценок.

Валидация полученного оптимального проектного решения на основе новых методов оценки статической и усталостной прочности, учитывающих усреднение напряжённо-деформированного состояния в пределах структурного элемента, что позволяет отказаться от проведения экспериментальной проверки.

#### Теоретическая значимость работы

В методе последовательного квадратичного программирования предложено вместо линеаризации ограничений выполнять их квадратичные приближения с целью повышения вероятности нахождения глобального экстремума в оптимизационной задаче.

В ходе разработки рекомендаций по проверке предельной прочности предложен подход построения диаграммы истинных напряжений и деформаций на участке после образования шейки, а также выражения для определения предельной пластической деформации в деформационном критерии вязкого разрушения.

Предложена модификация модели усталостной прочности Басквина – Мэнсона – Коффина с коррекцией средних напряжений Смита – Уотсона – Топпера, основанная на усреднении напряжённо-деформированного состояния в пределах структурного элемента.

В расчётах усталостной прочности для методов абсолютных максимальных главных напряжений, знаковых касательных напряжений, знаковых эквивалентных напряжений и напряжений Синса получены выражения расчётных напряжений как при плоском напряжённом состоянии, так и в случае пропорционального нагружения. Для метода Синса предложена модификация, учитывающая знак октаэдрических касательных напряжений, а также определено значение коэффициента чувствительности к гидростатическим напряжениям, согласующее расчётные напряжения этого метода в случае простого напряжённого состояния.

#### Практическая значимость работы

Разработан метод проектирования судовых конструкций с использованием комплексного подхода к оптимизации топологии, размеров и формы, позволяющий в короткие сроки создавать принципиально новые рациональные конструкции, отличающиеся от традиционных низкой материалоемкостью и высоким ресурсом, и стимулирующий разработку новых прорывных конструктивных решений. В рамках данного метода разработаны:

- алгоритм многоцелевой оптимизации, учитывающий различные способы нагружения конструкций;
- алгоритмы проверки предельной прочности, устойчивости и усталостной прочности, учитывающие трёхосность напряжённо-деформированного состояния и пластическое течение материала, что обуславливает более высокую точность получаемых оценок по сравнению с нормативными документами.

Разработаны новые конструктивные решения по узлу стыкового соединения алюминиевых панелей в составе корпуса высокоскоростного судна, отличающиеся от рекомендованного Правилами РМРС вдвое меньшей массой и в три раза большим ресурсом, и даны рекомендации по его оформлению, вошедшие в новую редакцию Правил.

Разработана принципиально новая запатентованная конструкция крышки люкового закрытия сухогрузного судна, отличающаяся от используемой на сухогрузе проекта RSD59 на 30 % меньшей массой и в пять раз большим ресурсом, и даны рекомендации по проектированию крышек.

Разработана оптимизированная конструкция перекрытия ледового пояса морской ледостойкой стационарной платформы, отличающаяся от прототипа на 60 % большей жёсткостью и почти вдвое большей несущей способностью при одинаковой массе, и выполнены её прочностные испытания, подтвердившие правильность принятых технических решений. На этой основе даны рекомендации по проектированию перекрытий в составе ледового пояса.

#### Методы исследования

Численные расчёты задач теории упругости выполнены с использованием метода конечных элементов. Решение задач топологической оптимизации выполнено с применением метода твёрдого изотропного материала со штрафом (Solid Isotropic Material with Penalization) и метода установки уровня (Level Set). Решение задач параметрической оптимизации выполнено с применением метода последовательного квадратичного программирования (Non-Linear Programming by Quadratic Lagrangian) и адаптивного одноцелевого метода (Adaptive Single-Objective), являющегося сочетанием поверхности отклика кригинга (Kriging), основанной на планировании эксперимента методом оптимального заполнения пространства (Optimal Space Filling), с методом смешанно-целочисленного последовательного квадратичного программирования (Mixed-Integer Sequential Quadratic Programming). Решение задач оптимизации формы выполнено методом эволюции граничных конечноэлементных узлов и методом прямой параметризации границы конструкции. Численные расчёты проводились с использованием программного комплекса ANSYS Workbench. Экспериментальные исследования проведены на универсальной испытательной гидравлической машине МУГ-3000.

### Положения, выносимые на защиту

- 1) Метод проектирования судовых конструкций с использованием комплексного подхода к оптимизации топологии, размеров и формы.
- 2) Метод расчёта усталостной прочности, учитывающий трёхосность напряжённо-деформированного состояния в узлах и особенности проверки как многоциклового, так и малоциклового усталости.

### Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность результатов параметрической оптимизации, выполненной в программном комплексе ANSYS Workbench, подтверждена:

- аналитически на примере решения тестовой задачи минимизации массы свободно опертой балки, нагруженной равномерно распределённой поперечной нагрузкой;
- путём демонстрации совпадения расчётных и экспериментальных результатов на примере решения задачи максимизации несущей способности перекрытия ледового пояса морской ледостойкой стационарной платформы.

Результаты, изложенные в диссертации, докладывались на 7 всероссийских конференциях и 3 конференциях с международным участием.

В результате разработки принципиально новой конструкции крышки люкового закрытия сухогрузного судна был получен патент на изобретение «Крышка люкового закрытия сухогрузного судна» № 2724042 от 18.06.2020.

### Публикации

По теме работы автором опубликовано 11 статей [1-11], из них 1 – в издании, индексируемом в международной базе данных Web of Science Core Collection, и 8 – в изданиях, рекомендованных ВАК при Минобрнауки России.

### Структура и объём работы

Диссертация выполнена согласно:

- ГОСТ Р 7.0.11–2011 «СИБИД. Диссертация и автореферат диссертации. Структура и правила оформления»;
- ГОСТ Р 7.0.5–2008 «СИБИД. Библиографическая ссылка. Общие требования и правила составления»;
- ГОСТ 2.105–2019 «ЕСКД. Общие требования к текстовым документам»;
- ГОСТ 8.417–2002 «ГСИ. Единицы величин».

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, списка сокращений и условных обозначений, списка литературы из 203 источников и одного приложения. Общий объём работы составляет 184 страниц, включая 120 рисунков и 15 таблиц.



# 1 АНАЛИЗ СОВРЕМЕННЫХ ПОДХОДОВ К ПРОЕКТИРОВАНИЮ КОНСТРУКЦИЙ И РАЗРАБОТКА МЕТОДА ПРОЕКТИРОВАНИЯ СУДОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ С КОМПЛЕКСНЫМ ПОДХОДОМ К ОПТИМИЗАЦИИ

## 1.1 Оптимизация при проектировании судовых конструкций

### 1.1.1 Задачи оптимизации в строительной механике корабля

В отечественной практике судостроения наука строительной механики корабля возникает в начале XX в. в работах проф. И.Г. Бубнова, ученика акад. А.Н. Крылова, и окончательно формируется в его двухтомном труде [12, 13]. Уже тогда Бубнов формулирует и успешно решает задачу определения размеров связей по заданному уровню допускаемых напряжений, что, безусловно, можно рассматривать как метод оптимального проектирования набора корпуса судна.

После Бубнова свой труд по строительной механике корабля публикует проф. П.Ф. Папкович [14], также ученик Крылова. Он ставит и решает разнообразные задачи о подборе рационального профиля балок, работающих на изгиб, и приводит конкретные числовые примеры. В этом же труде Папкович рассматривает следующую проблему проектирования: «ставить ли одинаковые стойки с обеих сторон переборки или же ставить их вдвое большей площади, но по одну сторону переборки», в результате решения которой он показывает, «что установка стоек только с одной стороны переборки даёт... без всякой дополнительной затраты материала увеличение момента сопротивления... от 6 % до 40 %». Перечисленные задачи имеют непосредственное отношение к оптимальному проектированию корпуса судна.

Через некоторое время в свет выходит трёхтомный справочник по строительной механике корабля под редакцией акад. Ю.А. Шиманского [15], ещё одного выдающегося ученика Крылова. В первом томе этого справочника приводится формула для определения площади поперечного сечения балки равного сопротивления, что по сути является решением оптимизационной задачи.

В 1990 г. выходит книга А.А. Родионова, посвящённая использованию аппарата математического программирования при проектировании конструкций судового корпуса [16]. В ней формулируется задача оптимизации конструкций, и особое внимание уделяется критериям прочности, жёсткости, устойчивости и заданных динамических характеристик конструкций при их оптимизации. Приводятся методы линейного и нелинейного программирования, используемые в задачах оптимизации конструкций.

В связи с огромным развитием вычислительной техники за последние 20 лет стало возможным численное решение задач с большим количеством неизвестных. Это обусловило возросший интерес исследователей к решению задач оптимизации применительно как к

судовому корпусу в частности, так и к объектам морской техники в целом. Снижение массы корпусных конструкций, снижение сопротивления движению, увеличение вместимости – всё это сулит повышением экономической эффективности использования судов. Ниже приведены некоторые из опубликованных работ, касающихся оптимизации корпусных конструкций.

Кормилицин Ю.Н., Малышевский Ю.В. и Родионов А.А. (2006) оптимизируют набор корпуса подводной лодки с применением декомпозиции задачи на два уровня и добиваются снижения его массы на 5 % [17].

Животовский Г.А. и Родионов А.А. (2006) проектируют крыльевой комплекс судна на подводных крыльях типа «Комета» с использованием многоцелевой оптимизации (снижение массы и сопротивления подводных крыльев) со смешанными переменными проектирования при ограничениях на сохранение заданного распределения нагрузки при ходе на крыльях, на нормальные напряжения, на общую устойчивость, на собственную частоту первого тона с учётом присоединённых масс воды, а также при ограничении по кавитации, и находят фронт Парето для носового и кормового крыльевых устройств, из которого выбирают точку, ближайшую к идеальной (с нулевой массой и нулевым сопротивлением), что позволяет им уменьшить массы подводных крыльев на 22–28 % и снизить их сопротивление на 6–9 % [18].

Родионов А.А. (2009) делает обзор успешного применения оптимизации и методов математического программирования в судостроении, а также формулирует направления дальнейшего развития оптимизации при проектировании судовых корпусов [19].

Тряскин В.Н. и Кхайн М. (2009) с применением аппарата математического программирования выполняют параметрическую оптимизацию набора корпуса судна в рамках требований Правил РМРС [20].

Сочинский С.В. (2012) предлагает метод наискорейшего спуска для определения осадки на миделе и угла дифферента судна по его продольному распределению масс [21].

Анкудинов О.С. и Сочинский С.В. (2015) выполняют расчёт непотоплаемости судна с использованием метода наискорейшего спуска [22].

Алексашин Д.А., Бойко М.С. и Кутейников М.А. (2017) с применением метода роя частиц проектируют поперечную танкерную раму согласно требованиям общих правил МАКО [23].

Тряскин В.Н. (2018) предлагает подход параметрического проектирования конструкций корпуса судна, включающий декомпозицию корпуса на отдельные районы [24].

### 1.1.2 Опыт использования топологической оптимизации в судостроении

За последнее десятилетие огромное развитие получили различные методы топологической оптимизации (ТО) и соответствующие программные комплексы (ПК), являющиеся высокоэффективными инструментами формального оптимального проектирования. ТО связана

с выбором под имеющиеся условия эксплуатации не столько размеров конструкции, сколько её топологии (конструктивно-силовой схемы). При этом существующие ПК дают небывалые возможности, демонстрирующие по некоторым признакам проявление искусственного интеллекта. ТО возможна по различным критериям, самым распространённым из которых является минимизация податливости конструкции (максимизация её жёсткости).

В отечественной практике судостроения ТО пока ещё не нашла широкого распространения, и среди опубликованных работ необходимо отметить следующие.

Ольховик Е.О. и Десницкий В.В. (2016) рассматривают проблему изготовления фасонных отливок ответственного назначения на примере корпуса судовой запорной (обратной) арматуры, где, используя в качестве целевой функции группу расчётных критериев, отвечающих за локальный дефицит подпитки жидким металлом, авторы подвергают ТО элементы, относящиеся к литейной технологии (стояк и прибыль) [25].

Чубуков Н.С. и Миронов М.Ю. (2017) используют подход выравнивания поля напряжений при оптимизации квадратной пластины, нагруженной равномерной поперечной нагрузкой, и регулярной плоской ферменной конструкции, нагруженной по периметру равномерной растягивающей нагрузкой [26].

Воропаев А.О. и Горбунов А.В. (2018) анализируют возможность применения современных средств ТО для изделий судового машиностроения на примере сопоставления возможностей различных ПК и прогнозируют экономическую выгоду от их использования [27].

Онегина Н.А. и Морозов А.С. (2019) решают задачу оптимизации формы грузоподъёмной траверсы с применением ТО методом SIMP в ПК ANSYS Workbench [28].

Коршунов В.А., Пономарев Д.А. и Родионов А.А. (2019) рассматривают проблему снижения массы подруливающего винта, в результате решения которой масса винта была снижена на 26 % за счёт выполнения ТО его лопастей и ступицы в ПК ANSYS Workbench [29].

В зарубежной практике судостроения спектр задач, решаемых с использованием ТО, несколько шире.

Jia Z., Ringsberg J.W. и Jia J. (2009) в среде Tosca Structure производят ТО части ледового пояса судна и выполняют сопоставление полученной оптимизированной конструкции с традиционной путём моделирования в ПК ABAQUS Explicit нелинейного динамического взаимодействия с ровным льдом, которое показало незначительное увеличение напряжений в оптимизированной конструкции при снижении массы на 10 % [30].

Lindemann T. и Kaeding P. (2010) выполняют оптимизацию формы вырезов в днищевых флорах второго дна контейнеровоза и добиваются снижения массы флоров на 2,5 % при сохранении прежнего уровня напряжений [31].

Daifuku M. и соавт. (2014) в ПК Altair OptiStruct выполняют ТО фундамента силовой

установки балкера, состоящей из трёх генераторов с дизелями, и добиваются снижения уровня вибраций на 8 % при сохранении исходной массы, снижения уровня вибраций на 5 % при снижении массы на 1,1 т и снижения массы на 2,3 т при сохранении исходного уровня вибраций [32].

Jang I.G., Kim K.-S. и Kwak B.M. (2014) в ходе концептуального проектирование крана плавучей пристани для разгрузки и загрузки сверхбольших контейнеровозов выполняют ТО, учитывающую нагрузки, зависящие от конкретного вида конструкции (такие как собственный вес, силы инерции от качки и ветровая нагрузка), для различных расчётных случаев, после чего с целью определения размеров поперечных сечений стержней, входящих в конструкцию крана, выполняют оптимизацию формы, что позволяет удовлетворить проектным требованиям [33].

Li K. и соавт. (2018) в среде ANSYS Mechanical APDL с помощью метода BESO выполняют ТО судового шлюза для вертикального подъёма судов на Силинской ГЭС (КНР), что позволяет снизить его массу на 23,69 % [34].

### 1.1.3 Опыт использования топологической оптимизации в смежных отраслях

В отличие от судостроения, которое традиционно является одной из самых консервативных отраслей промышленности, в авиации, космонавтике, автомобилестроении, машиностроении и строительстве активное использование ТО началось на несколько лет раньше и нашло гораздо более широкое применение. Среди отечественных публикаций стоит выделить следующие.

Яров В.А. и Прасоленко Е.В. (2011) выполняют в среде ANSYS Mechanical APDL проектирование монолитной плиты перекрытия высотного 50-этажного здания с применением методов топологической и параметрической оптимизации при действии нормативных нагрузок и получают конструкцию на 228 т легче традиционной [35].

Васильев Б.Е. и Магеррамова Л.А. (2015) выполняют ТО неохлаждаемой лопатки турбины методом SIMP при ограничении на её собственные частоты и получают новую конструкцию лопатки, имеющую на 34 % меньшую массу по сравнению со сплошной [36].

Марченко П.А. и Новокшенов А.Д. (2015) в среде ANSYS Mechanical APDL решают задачу ТО кронштейна под установку звёздного датчика с ограничениями на его перемещения и собственные частоты колебаний и добиваются снижения массы кронштейна в 2,5–3 раза по сравнению с исходным вариантом в зависимости от выбора материала [37].

Боровиков А.А. и Тененбаум С.М. (2016) в ПК Altair HyperWorks/OptiStruct выполняют ТО проставки переходного отсека космического аппарата и оценивают влияние штрафного параметра метода SIMP, начального значения массовой доли и технологических ограничений (минимального и максимального размеров конструктивных элементов, а также ограничений процессов литья и штамповки) на получаемые результаты [38].

Васильев Б.Е. и соавт. (2016) проектируют пустотелый диск с двумя полотнами для турбины высокого давления с применением ТО в ПК ANSYS Workbench [39].

Комаров В.А. и Кишов Е.А. (2016) в ПК ANSYS Workbench проектируют кронштейн навески интерцептора с использованием ТО и получают решение с массой в 2 раза меньше исходной [40].

Поддубко С.Н. и соавт. (2016) с применением программного пакета solidThinking Inspire выполняют ТО конструкции балки передней оси карьерного самосвала БЕЛАЗ, рассматривая при этом несколько расчётных случаев, и добиваются снижения её массы до 20 % от исходной [41].

Александрин Ю.С., Туктаров С.А. и Чедрик В.В. (2017) проектируют силовую конструкцию крыла вертолета с применением ТО методом SIMP и получают конструктивно-силовую схему, позволяющую снизить исходную массу крыла на 37 % [42].

Бояршинова И.Н. и Ильиных М.С. (2017) предлагают комбинированную методику оптимального проектирования конструкций с последовательным использованием топологической и параметрической оптимизации [43].

Васильев Б.Е. и соавт. (2017) анализируют возможность применения ТО методом SIMP при проектировании зубчатых передач и находят формы зубчатого колеса при ограничении на собственные частоты колебаний, после чего выполняют его параметрическую оптимизацию, что позволяет добиться снижения массы на 10 %, напряжений на 13 % и осевых перемещений почти в 2 раза [44].

Еремин А.В., Жуков В.В. и Кишов Е.А. (2017) в ПК ANSYS Workbench проектируют силовую тягу с использованием ТО в программе Simulabs Topology Design и добиваются почти пятикратного снижения её массы [45].

Захаров В.О. (2017) в ПК ANSYS Workbench выполняет ТО кронштейна малого космического аппарата «Аист-2Д» методом SIMP и добивается снижения его массы на 24 %, увеличения жёсткости на 33 % и увеличения запаса прочности на 36 % [46].

Фасахов Р.Р. и соавт. (2017) проектируют кузов автомобиля путём выполнения его ТО методом SIMP при действии двух расчётных случаев нагружения (крутильного и изгибного) и в результате добиваются повышения крутильной жёсткости на 4 %, а изгибной – на 2 % [47].

Французов А.А., Шаповалов Я.И. и Вдовин Д.С. (2017) применяют ТО методом ESO в задаче проектирования звеньев захвата тубинга грузоподъёмной техники и добиваются снижения их массы в полтора раза при сохранении прочности [48].

Чирский С.П. и Мягков Л.Л. (2017) предлагают метод оптимизации формы основных деталей ДВС с применением ТО в ПК ANSYS Workbench и апробируют его на примере шатуна среднеоборотного тепловозного дизеля [49].

Алехин П.А., Хлебников В.А. и Хрусталеv Р.В. (2018) применяют ТО методом SIMP для

создания новых конструкций радиаторов пассивного охлаждения и добиваются увеличения эффективности теплоотвода на 11 % при одинаковой массе и площади поверхности [50].

Куркин Е.И. и соавт. (2018) при проектировании конструкций из короткоармированных композитов пользуются топологической и параметрической оптимизацией в ПК ANSYS Workbench, что позволяет спроектировать композитный кронштейн оптимальной формы и размеров [51].

Попова Д.Д. и соавт. (2018) в ПК ANSYS Workbench выполняют ТО кронштейна трубопровода авиационного ГТД с применением метод SIMP, что позволяет снизить его массу на 30 % при сохранении прочности и жёсткости [52].

Тагиев Р.С. и Москаленко М.Б. (2018) выполняют ТО рамы гоночного автомобиля, что даёт снижение массы на 6 % и увеличение жёсткости на 1,28 % [53].

Хитрин А.М. и соавт. (2018) в ПК Catoro выполняют ТО корпусных деталей вертолётного редуктора и добиваются снижения их массы на 20–42 % при сохранении прочности и отстройки от критических частот [54].

Боровиков А.А., Леонов А.Г. и Тушев О.Н. (2019) предлагают методику определения расположения межпанельных кронштейнов корпуса космического аппарата с использованием ТО в ПК MSC.Patran/Nastran, учитывающей ограничения на собственные частоты колебаний конструкции для динамической совместимости космического аппарата с ракетоносителем [55].

Буй В.Ф. и соавт. (2019) с помощью MATLAB, ПК ANSYS и ПК ABAQUS производят ТО конструкции диска турбины в осесимметричной постановке при действии термомеханических нагрузок и добиваются снижения его массы на 32 % при удовлетворении требований жёсткости [56].

Гончаров Р.Б. и Зузов В.Н. (2019) с применением программ LS-TaSC, LS-OPT и явного решателя LS-DYNA выполняют топологическую и параметрическую оптимизацию задней части кабины грузового автомобиля, в результате чего она стала удовлетворять требованиям пассивной безопасности [57].

Козлов М.Ю., Аркатов В.Ю. и Гроль М.С. (2019) проектируют внутренний корпус камеры сгорания с применением ТО и добиваются снижения его массы на 10 % при сохранении прочности и устойчивости [58].

Куркин Е.И., Кишов Е.А. и Спирина М.О. (2019) в ПК ANSYS Workbench с применением метода SIMP выполняют ТО кронштейна как с учётом ортотропных свойств материала, так и без, и показывают, что учёт ортотропных свойств материала кронштейна позволяет уменьшить его строительную высоту на 23 % и повысить жёсткость на 5,1 % по сравнению с изотропным вариантом [59].

Рутковский В.О. и Рутковская М.А. (2019) выполняют ТО картера двухтактного

двухцилиндрового оппозитного двигателя, что позволяет снизить массу картера на 30 % при сохранении его прочности и жёсткости [60].

Санников В.А. (2019) с использованием ПК ANSYS Workbench и программы HyperWorks OptiStruct выполняет ТО заднего кулака автомобиля, что позволяет снизить его массу более чем в 4,5 раза при сохранении прочности и жёсткости [61].

Штромило И.В. и Побелянский А.В. (2019) в ПК ANSYS Workbench с применением метода SIMP выполняют ТО кронштейна крепления консоли крыла к фюзеляжу беспилотного летательного аппарата и добиваются снижения его массы на 55,4 % при сохранении прочности и жёсткости [62].

#### 1.1.4 Обоснование поставленных целей и задач

Приведенный выше обзор публикаций, связанных с использованием подходов топологической и параметрической оптимизации при проектировании различного рода конструкций, позволят сделать вывод о перспективности их применения в судостроении. При этом под оптимизацией формы в обозреваемых работах подразумевается не локальное снижение концентрации напряжений, а поиск рациональной конструктивно-силовой схемы, что по сути является прямой задачей оптимизации топологии. Также рассмотренные публикации не содержат законченного полноценного метода проектирования конструкций, учитывающего проверку как предельной прочности и устойчивости, так и много- и малоциклового усталости.

## 1.2 Задача оптимизации и методы её решения

Традиционно задача условной оптимизации имеет следующую формулировку<sup>1)</sup>:

$$f(\{x\}) \rightarrow \min_{\{x\} \in X \subset \mathbb{R}^n} \quad (1.1)$$

при условиях<sup>2)</sup>

$$\{g\}(\{x\}) \leq 0, \quad (1.2)$$

$$\{h\}(\{x\}) = 0, \quad (1.3)$$

где  $\{x\}$  – вектор переменных проектирования (сами переменные могут быть как непрерывными, так и дискретными);

$f$  – целевая функция (обычно непрерывная);

$\{g\}$  и  $\{h\}$  – функции, накладывающие ограничения в форме неравенств и равенств соответственно, чаще всего непрерывные:

$$\begin{aligned} g_k, h_l &\in C(X); \\ k &= 1, \dots, N_g \text{ и } l = 1, \dots, N_h; \end{aligned} \quad (1.4)$$

<sup>1)</sup> Задача максимизации функции  $f$  эквивалентна задаче минимизации функции  $-f$ .

<sup>2)</sup> Двустороннее ограничение  $a \leq \varphi(\{x\}) \leq b$  эквивалентно двум ограничениям  $a - \varphi(\{x\}) \leq 0$  и  $\varphi(\{x\}) - b \leq 0$ .

$$N_g = \text{card}\{g\} \text{ и } N_h = \text{card}\{h\}.$$

Задачу (1.1)–(1.4) принято называть задачей *математического программирования*. Поскольку оптимизационная задача с одновременным наличием непрерывных и дискретных переменных проектирования является весьма сложной для решения, исторически раньше Ж.Л. Лагранжем был разработан метод решения задачи математического программирования только с непрерывными переменными проектирования.

В математическом программировании решение задачи условной минимизации чаще всего сводится к решению задачи (а иногда серии задач) безусловной минимизации, где классическим подходом стал *метод множителей Лагранжа*. Он позволяет свести задачу на условный минимум функции  $f$  к задаче на безусловный минимум функции Лагранжа  $L_0$ , обобщённый вид которой определяется следующим образом [63-69]:

$$L_0(\{x\}, \lambda_0, \{\lambda\}, \{\mu\}) = \lambda_0 f(\{x\}) + \{\lambda\}^T \{g\}(\{x\}) + \{\mu\}^T \{h\}(\{x\}), \quad (1.5)$$

где  $\lambda_0$ ,  $\{\lambda\}$  и  $\{\mu\}$  – множители Лагранжа:

$$\text{card}\{\lambda\} = \text{card}\{g\} = N_g, \text{ card}\{\mu\} = \text{card}\{h\} = N_h. \quad (1.6)$$

Необходимые условия существования экстремума функции  $L_0$  определяются согласно теореме Каруша – Куна – Таккера (ККТ), где предполагается, что функции  $f$ ,  $\{g\}$  и  $\{h\}$  гладкие:

- условия стационарности

$$\nabla_{\{x\}} L_0(\{x\}, \lambda_0, \{\lambda\}, \{\mu\}) = 0; \quad (1.7)$$

- условие нетривиальности

$$|\lambda_0| + |\{\lambda\}| + |\{\mu\}| \neq 0; \quad (1.8)$$

- условия допустимости (прямой выполнимости) (1.2)–(1.3)<sup>1)</sup>;

- условия неотрицательности (двойственной выполнимости)

$$\lambda_k \geq 0, k = 0, 1, \dots, N_g; \quad (1.9)$$

- условия дополняющей нежёсткости

$$\lambda_k g_k(\{x\}) = 0, k = 1, \dots, N_g \text{ или сокращённо } \{\lambda g\}(\{x\}) = 0, \quad (1.10)$$

которые говорят, что если в точке локального минимума ограничение-неравенство является строгим, то оно оказывается несущественным, поэтому в функцию Лагранжа входит с нулевым множителем [70].

При решении указанной системы выделяют два случая:  $\lambda_0 \neq 0$  (без ограничения общности можно полагать  $\lambda_0 = 1$ ) и  $\lambda_0 = 0$ . В первом случае в стационарной точке  $\{x^*\}$  градиенты активных ограничений-неравенств  $\nabla g_k(\{x^*\})$ ,  $k \in K_a = \{k \in \mathbb{N} | g_k(\{x^*\}) = 0\}$  и ограничений-равенств  $\nabla h_l(\{x^*\})$ ,  $l = 1, \dots, N_h$  являются линейно независимыми, и такую точку называют *регулярной* (*нормальной*). Во втором же случае указанные градиенты являются линейно зависимыми в

<sup>1)</sup> Условие (1.3) можно рассматривать как  $\nabla_{\{\mu\}} L_0(\{x\}, \lambda_0, \{\lambda\}, \{\mu\}) = 0$ .



стационарной точке  $\{x^*\}$  и её называют *нерегулярной* (*анормальной*), причём в этом случае обобщённая функция Лагранжа  $L_0$  не использует никакой информации об исходной целевой функции  $f$ . Это говорит о том, что решения системы, если таковые имеются, полностью определяются ограничениями (вне зависимости от поставленной цели), а нам лишь приходится выбирать наименьшее значение целевой функции на множестве полученных нерегулярных решений.

В регулярных стационарных точках обобщённая функция Лагранжа  $L_0$  превращается в классическую (или, как говорят, регулярную) функцию Лагранжа  $L$ :

$$L(\{x\}, \{\lambda\}, \{\mu\}) = L_0(\{x\}, 1, \{\lambda\}, \{\mu\}), \quad (1.11)$$

для которой существуют два вида достаточных условия существования экстремума:

- *достаточные условия минимума первого порядка* [66, 69]

$$\text{card } K_a + N_h = n, \quad (1.12)$$

$$\lambda_k > 0 \text{ при всех } k \in K_a;$$

- *достаточные условия минимума второго порядка* (здесь дополнительно предполагается, что функции  $f$ ,  $\{g\}$  и  $\{h\}$  дважды дифференцируемы в регулярной точке) [63-69]

$$\{y\}^T \cdot [\nabla_{\{x\}\{x\}}^2 L(\{x^*\}, \{\lambda^*\}, \{\mu^*\})] \cdot \{y\} > 0 \text{ на всех } \{y\} \neq 0 \text{ таких, что}$$

$$\nabla g_k(\{x^*\})\{y\} \leq 0 \text{ при } k \in K_a \text{ и } \lambda_k^* = 0, \quad (1.13)$$

$$\nabla g_k(\{x^*\})\{y\} = 0 \text{ при } k \in K_a \text{ и } \lambda_k^* > 0,$$

$$\nabla h_l(\{x^*\})\{y\} = 0 \text{ при } l = 1, \dots, N_h,$$

где  $[\nabla_{\{x\}\{x\}}^2 L(\{x^*\}, \{\lambda^*\}, \{\mu^*\})]$  – матрица Гессе вторых производных функции Лагранжа  $L$  по переменным  $\{x\}$  в точке  $(\{x^*\}, \{\lambda^*\}, \{\mu^*\})$ .

Одним из способов сведения задачи условной оптимизации со смешанными ограничениями (1.2)–(1.3) к задаче оптимизации только с ограничениями-равенствами является использование вектора  $\{z\} \in \mathbb{R}^{N_g}$  дополнительных фиктивных переменных, позволяющих переписать ограничение-неравенство (1.2) в форме равенства [63, 71]:

$$\tilde{g}_k(\{x\}, \{z\}) = g_k(\{x\}) + z_k^2 = 0, \quad k = 1, \dots, N_g. \quad (1.14)$$

При такой замене регулярная функция Лагранжа  $L$  принимает вид

$$L(\{x\}, \{z\}, \{\lambda\}, \{\mu\}) = f(\{x\}) + \{\lambda\}^T \{\tilde{g}\}(\{x\}, \{z\}) + \{\mu\}^T \{h\}(\{x\}), \quad (1.15)$$

а необходимые условия существования экстремума приобретают более простую форму

$$\nabla L(\{x\}, \{z\}, \{\lambda\}, \{\mu\}) = 0, \quad (1.16)$$

которая с учётом (1.14) может быть расписана в виде

$$\nabla f(\{x\}) + \{\lambda\}^T [\nabla \{g\}(\{x\})] + \{\mu\}^T [\nabla \{h\}(\{x\})] = 0, \quad (1.17)$$

$$\lambda_k (2z_k) = 0 \text{ и } g_k(\{x\}) + z_k^2 = 0, \quad k = 1, \dots, N_g, \quad (1.18)$$

$$\{h\}(\{x\}) = 0, \quad (1.19)$$

где  $[\nabla\{g\}(\{x\})]$  и  $[\nabla\{h\}(\{x\})]$  – соответственно матрицы Якоби функций  $\{g\}$  и  $\{h\}$  в точке  $\{x\}$ . Условия (1.18) можно записать сокращённо

$$\lambda_k g_k(\{x\}) = 0, k = 1, \dots, N_g \text{ или } \text{diag}\{\lambda\}\{g\}(\{x\}) = 0, \quad (1.20)$$

где  $\text{diag}\{\lambda\}$  – диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят элементы вектора  $\{\lambda\}$ .

Помимо метода множителей Лагранжа в математическом программировании активно используют семейство *методов штрафных функций*, также доказавших свою эффективность [66, 67, 69, 72-79]. Методы этого семейства осуществляют переход от условной минимизации функции  $f$  к последовательной безусловной минимизации набора вспомогательных функций

$$\varphi_\alpha(\{x\}) = f(\{x\}) + P_\alpha(\{x\}), \quad (1.21)$$

где  $\alpha$  – положительный штрафной параметр;  $P_\alpha$  – неотрицательная штрафная функция:

$$P_\alpha(\{x\}) \geq 0. \quad (1.22)$$

При этом выделяют два вида штрафных функций: *внешнюю* и *внутреннюю*. В первом случае она равна нулю всюду на допустимом множестве

$$X = \left\{ \{x\} \in \mathbb{R}^n \mid \{x_{down}\} \leq \{x\} \leq \{x_{up}\}; \{g\}(\{x\}) \leq 0; \{h\}(\{x\}) = 0 \right\} \quad (1.23)$$

и строго положительна вне допустимого множества:

$$\begin{aligned} P_\alpha(\{x\}) &= 0 \text{ при } \{x\} \in X, \\ P_\alpha(\{x\}) &> 0 \text{ при } \{x\} \notin X, \end{aligned} \quad (1.24)$$

причём вне  $X$  с ростом штрафного параметра она стремится к бесконечности<sup>1)</sup>:

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow +\infty \\ \{x\} \notin X}} P_\alpha(\{x\}) = +\infty. \quad (1.25)$$

Если  $\{\alpha_m\}$  – монотонная последовательность штрафных параметров, стремящаяся к бесконечности, то  $\left\{ \min_{\{x\} \in X} \varphi_{\alpha_m}(\{x\}) \right\}$  – монотонная последовательность минимумов вспомогательных функций, стремящаяся к минимуму целевой функции  $f$ . Поскольку рассмотренная функция  $P_\alpha$  штрафует внешность допустимого множества, такой метод называют *методом внешней штрафной функции* или *методом внешней точки*, т.к. начальное приближение необязательно допустимое и чаще всего берётся из внешности  $X$ . Одним из примеров внешней штрафной функции является степенная функция

$$P_\alpha(\{x\}) = \alpha \left( \|\{g^+\}(\{x\})\|_p^p + \|\{h\}(\{x\})\|_p^p \right) = \alpha \left( \sum_{k=1}^{N_g} |g_k^+(\{x\})|^p + \sum_{l=1}^{N_h} |h_l(\{x\})|^p \right), \quad (1.26)$$

где  $\|\cdot\|_p$  – гёльдерова  $p$ -норма вектора;  $g_k^+(\{x\}) = \max\{0; g_k(\{x\})\}$ .

Во втором случае штрафная функция принимает близкие к нулю значения внутри допустимого множества и резко растёт при приближении к его границе:

<sup>1)</sup> Иногда рассматривают штрафной параметр  $\beta = 1/\alpha$ , и указанный предел выполняется при  $\beta \rightarrow 0+$ .

$$P_\alpha(\{x\}) \xrightarrow{\{x\} \rightarrow \partial X} +\infty. \quad (1.27)$$

Этот метод работает при наличии только ограничений-неравенств (обычно строгих) и штрафует приближение к границе допустимого множества, поэтому его часто называют *методом внутренней (барьерной) функции* или *методом внутренней точки*, поскольку начальное приближение берётся из внутренности  $X$ . Здесь примерами являются обратная и логарифмическая функции соответственно:

$$P_\alpha(\{x\}) = -\alpha \sum_{k=1}^{N_g} \frac{1}{g_k(\{x\})}, \quad (1.28)$$

$$P_\alpha(\{x\}) = -\alpha \sum_{k=1}^{N_g} \ln(-g_k(\{x\})). \quad (1.29)$$

Объединением метода множителей Лагранжа и метода штрафной функции стал *модифицированный (расширенный) метод Лагранжа*, в котором к регулярной функции Лагранжа  $L$  добавляют внешнюю штрафную функцию обычно квадратичного вида (1.26) и получают модифицированную функцию Лагранжа  $L_\alpha$  [63]:

$$L_\alpha(\{x\}, \{\lambda\}, \{\mu\}) = f(\{x\}) + \{\lambda\}^T \{g^+\}(\{x\}, \{\lambda\}, \alpha) + \{\mu\}^T \{h\}(\{x\}) + \frac{\alpha}{2} (\|\{g^+\}(\{x\}, \{\lambda\}, \alpha)\|_2^2 + \|\{h\}(\{x\})\|_2^2), \quad (1.30)$$

где

$$g_k^+(\{x\}, \{\lambda\}, \alpha) = \max \left\{ -\frac{\lambda_k}{\alpha}; g_k(\{x\}) \right\}, \quad k = 1, \dots, N_g \quad (1.31)$$

и использован способ сведения ограничений-неравенств к ограничениям-равенствам по типу (1.14).

Описанные выше подходы широко применяются при решении задач *нелинейного программирования* (НЛП). В результате задачу условной минимизации исходной целевой функции  $f$  удаётся свести к задаче безусловной минимизации функции  $L$  или последовательности функций  $\{\varphi_\alpha\}$  или  $\{L_\alpha\}$ , численные методы решения которой рассмотрены ниже. Однако даже если все имеющиеся в задаче НЛП функции имеют требуемую степень гладкости, проверка достаточных условий минимума целевой функции в найденных стационарных точках не гарантирует, что этот минимум является глобальным. В общем случае для определения глобального минимума необходимо сравнить значения целевой функции во всех точках локального минимума. Ситуация осложняется тем, что в подавляющем большинстве реальных задач НЛП, возникающих при проектировании судовых конструкций, неизвестен конкретный аналитический вид ни целевой функции, ни ограничений, а поэтому количество локальных минимумов также неизвестно. Таким образом, найденный минимум в задаче НЛП, вообще говоря, может оказаться локальным. Для оценки глобального поведения целевой функции

рекомендуется использовать *планирование эксперимента* (design of experiment) с одновременным построением *поверхности отклика* (response surface). Последняя строится с применением статистических подходов, а полученная в результате модель называется *метамоделью*.

Необходимо отметить, что очень часто возникают задачи многоцелевой оптимизации, в которых имеет место не одна скалярная целевая функция, а сразу несколько. В таком случае удобно рассматривать вектор целевых функций

$$\{f\}(\{x\}), \text{card}\{f\} = N_f. \quad (1.32)$$

Традиционным приёмом сведения векторной целевой функции (1.32) к скалярной типа (1.1) является скалярное умножение на весовой вектор  $\{w\}$  такой же размерности:

$$F(\{x\}) = \{w\}^T \{f\}(\{x\}) = \sum_{j=1}^{N_f} w_j f_j(\{x\}). \quad (1.33)$$

По умолчанию весовой вектор полагается единичным ( $\{w\} = \{1\}$ ), что придаёт (1.33) вид

$$F(\{x\}) = f_1(\{x\}) + f_2(\{x\}) + \dots + f_{N_f}(\{x\}). \quad (1.34)$$

Другим естественным методом сопоставления вектору скалярной величины является уже упомянутая ранее гёльдерова  $p$ -норма:

$$F(\{x\}) = \|\{f\}(\{x\})\|_p = \left[ \sum_{j=1}^{N_f} |f_j(\{x\})|^p \right]^{1/p}. \quad (1.35)$$

В частности,

$$\begin{aligned} \|\{f\}(\{x\})\|_1 &= |f_1(\{x\})| + |f_2(\{x\})| + \dots + |f_{N_f}(\{x\})|, \\ \|\{f\}(\{x\})\|_2 &= \|\{f\}(\{x\})\| = \sqrt{f_1(\{x\})^2 + f_2(\{x\})^2 + \dots + f_{N_f}(\{x\})^2}, \\ \|\{f\}(\{x\})\|_\infty &= \max_{j=1, \dots, N_f} |f_j(\{x\})|. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Заметим, что если все  $f_j(\{x\}) \geq 0$  при  $\{x\} \in X$ , то 1-норма совпадает с (1.34).

Ещё одним подходом к многоцелевой оптимизации является *критерий Парето* [80, 81]. В этом подходе вместо сопоставления вектор-функции скалярного значения используют отношение частичного порядка между векторами:

$$\{f\}(\{x\}) \preceq \{f\}(\{y\}) \Leftrightarrow \forall j (f_j(\{x\}) \leq f_j(\{y\})). \quad (1.37)$$

Предположим, что значения двумерной вектор-функции  $\{f\} = \{f_1 \ f_2\}^T$  заметают область  $\Phi$ , показанную на рис. 1.1. Тогда в задаче многоцелевой минимизации  $\{f\} \rightarrow \min$  для точек, лежащих на дуге, выделенной жирным, не существует лучших по критерию (1.37), и все они являются *Парето-оптимальными*, образующими *фронт Парето*, являющийся частью  $\partial\Phi$ .

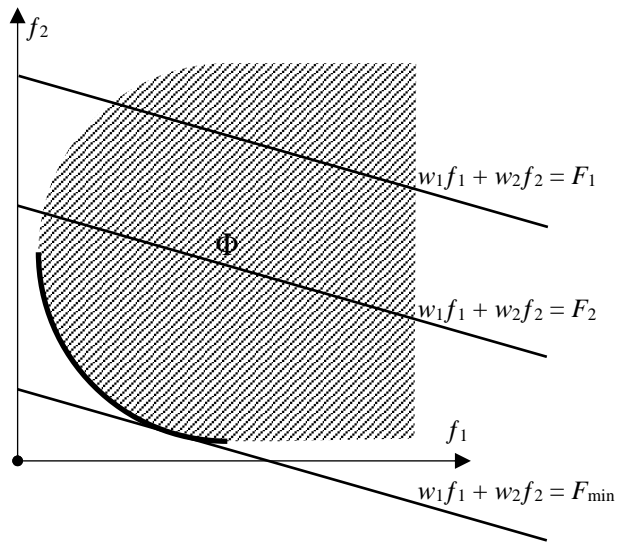


Рис. 1.1 – Фронт Парето (выделен жирным) в задаче минимизации двумерной вектор-функции  $\{f\} = \{f_1, f_2\}^T$  и прямые, соответствующие взвешенной сумме (1.33), где  $F_1 > F_2 > F_{\min}$

Заметим, что взвешенная сумма (1.33) является уравнением прямой

$$w_1 f_1 + w_2 f_2 = F \quad (1.38)$$

на плоскости  $(f_1, f_2)$ , а минимизация этой суммы по сути является поиском прямой (1.38), касательной фронту Парето (см. рис. 1.1). Таким образом, перебирая различные сочетания весовых коэффициентов  $\{w\}$ , можно отыскивать все точки фронта Парето.

Аналогично минимизация гёльдеровой нормы (1.35) вектор-функции является поиском гёльдеровой окружности

$$\|\{f\}\|_p = F \quad (1.39)$$

с центром в начале координат, касающейся фронта Парето. Если область  $\Phi$  включает в себя начало координат, то минимальной гёльдеровой нормой, очевидно, является нулевая.

## 1.2.1 Параметрическая оптимизация

### 1.2.1.1 Задача параметрической оптимизации

#### 1.2.1.1.1 Формулировка

В узком смысле под задачей параметрической оптимизации (ПО) в настоящей работе понимается задача минимизации массы  $M$  (или объёма  $V$ ) судовой конструкции, геометрия которой полностью описывается вектором переменных проектирования  $\{x\}$  (чаще всего неотрицательных), которые принято называть параметрами:

$$M(\{x\}) = \{1\}^T \{m\}(\{x\}) = \sum_{j=1}^{\text{card}\{m\}} m_j(\{x\}) \rightarrow \min_{\{x_{down}\} \leq \{x\} \leq \{x_{up}\}} \quad (1.40)$$

где  $m_j$  – масса отдельного  $j$ -го элемента судовой конструкции. К судовым конструкциям всегда предъявляют требования прочности, жёсткости и устойчивости при действии расчётных нагрузок, что влечёт за собой наложение ограничений

$$\{\sigma\}(\{x\}) \leq \sigma_{max}, \quad (1.41)$$

$$\{u\}(\{x\}) \leq u_{max}, \quad (1.42)$$

$$\{\lambda_{min}\}(\{x\}) \geq 1,2 \dots 1,3, \quad (1.43)$$

где  $\{\sigma\}$  – вектор наибольших напряжений в конструкции, посчитанных для всех расчётных случаев по одному из критериев прочности, исследование которых выполнено в главе 2;

$\{u\}$  – вектор наибольших перемещений конструкции, посчитанных для всех расчётных случаев (может быть как полное перемещение, так и перемещение вдоль заданного направления);

$\sigma_{max}, u_{max}$  – допускаемые напряжение и перемещение соответственно;

$\{\lambda_{min}\}$  – вектор наименьших коэффициентов запаса линейной устойчивости, посчитанных для всех расчётных случаев.

В широком смысле под задачей ПО в настоящей работе понимается минимизация непрерывной функции  $f$ , зависящей от вектора параметров  $\{x\}$ :

$$f(\{x\}) \rightarrow \min_{\{x_{down}\} \leq \{x\} \leq \{x_{up}\}}, \quad (1.44)$$

с ограничениями (1.41)–(1.43), перечисленными выше. Здесь примером является минимизация стоимости изготовления бортового перекрытия:

$$f(\{x\}) = \{c\}^T \{m\}(\{x\}) \rightarrow \min_{\{x_{down}\} \leq \{x\} \leq \{x_{up}\}}, \quad (1.45)$$

где  $\{c\}$  – вектор удельной стоимости изготовления одной тонны каждого элемента конструкции.

#### 1.2.1.1.2 Классические примеры

Примером простейшей задачи ПО является минимизация массы балки, свободно опертой на концах и нагруженной равномерно распределённой поперечной нагрузкой (см. рис. 1.2). В этой задаче параметрами являются геометрические размеры профиля балки: например, для прямоугольного профиля это его ширина и высота, для круглого профиля – радиус, а для коробчатого и трубчатого профилей к указанным добавляется толщина стенки<sup>1)</sup>. Данная задача поддаётся аналитическому решению с применением балочной теории Тимошенко, которое было выполнено в работе [82]. Решения, полученные с применением метода конечных элементов (МКЭ), показаны рис. 1.3.

---

<sup>1)</sup> Параметризация задачи не всегда однозначна, т.е. одну и ту же задачу можно параметризовать различными способами. Однако оптимальное решение, если оно существует, не зависит от способа параметризации.

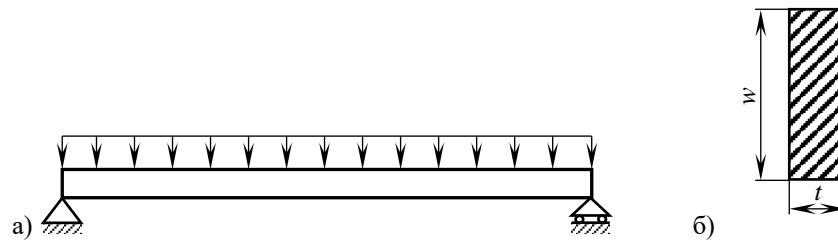


Рис. 1.2 – Свободно опертая балка, нагруженная равномерно распределённой поперечной нагрузкой: а) постановка задачи; б) параметризация профиля

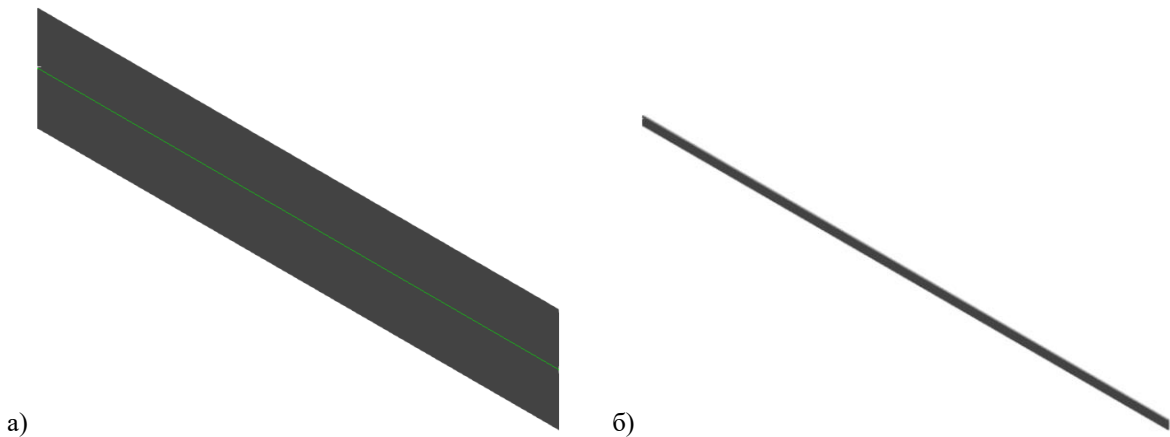


Рис. 1.3 – Решения задачи ПО свободно опертой балки: а) без учёта устойчивости (высота : ширина = 1000 : 1); б) с учётом линейной устойчивости (высота : ширина = 6,7 : 1)

Более сложным примером задачи ПО является минимизация массы перекрытия, решение которой выполнено в главе 3. Перекрытие содержит в своём составе наружную обшивку, а также балки основного и вспомогательного набора. Соответственно параметрами в задаче являются толщина наружной обшивки, геометрические размеры профилей балок, которые, вообще говоря, могут отличаться даже в пределах одного набора, а также шпация и число балок каждого набора, т.е. в такой задаче могут быть целочисленные параметры. Хотя оптимизацию всего перекрытия можно свести к оптимизации его отдельных элементов (и такой способ является весьма хорошим рабочим инструментом), всё же совместная работа балок точнее учитывается в полной модели перекрытия, решение которой возможно с привлечением численных методов, в частности, МКЭ. Использование МКЭ для определения напряжённо-деформированного состояния (НДС) перекрытия переводит задачу ПО в численную область, что требует применения численных методов оптимизации.

### 1.2.1.2 Классификация методов параметрической оптимизации

#### 1.2.1.2.1 Линейное программирование

Численное решение задач математического программирования началось с появления в 1940-х гг. *линейного программирования* (ЛП), основанного на работах Л.В. Канторовича [83] и Д.Б. Данцига [84]. В задачах ЛП целевая функция является линейной, а ограничения – аффинными:

$$f(\{x\}) = \{c\}^T \{x\} \rightarrow \max_{\{x\} \geq 0} \quad (1.46)$$

при условиях

$$[A]\{x\} \leq \{b\}. \quad (1.47)$$

Для решения задачи ЛП (1.46)–(1.47) Данцигом был предложен универсальный метод, названный *симплекс-методом*. В некоторых частных случаях задач ЛП удалось разработать более эффективные алгоритмы: например, для решения транспортной задачи используется *метод потенциалов*, являющийся модификацией симплекс-метода, а для задачи о назначениях, частного случая транспортной задачи, чаще всего используют *венгерский алгоритм*, впервые опубликованный К. Якоби посмертно в 1890 г. и переоткрытый Г. Куном в 1955 г. Для решения задач *целочисленного линейного программирования* (ЦЛП) сначала в 1958 г. Р. Гомори [85] на основе симплекс-метода разработал *метод отсечения* [66, 78, 86, 87], а затем в 1960 г. А. Лэнд и Э. Дойг [88] предложили более эффективный *метод ветвей и границ* [66, 78, 86, 87]. Хотя задачи проектирования судовых конструкций иногда бывают линейными, в том числе включающими в себя задачи ЦЛП, чаще всего они всё-таки носят заметно нелинейный характер (содержат нелинейную целевую функцию или нелинейные ограничения, как, например, в случае с ограничениями по напряжениям и деформациям), поэтому перечисленные методы ЛП не могут удовлетворить всем возникающим в судостроении потребностям.

#### 1.2.1.2.2 Выпуклое программирование

В 1951 г. Г. Кун и А. Таккер [89] рассматривают минимизацию выпуклых функций на выпуклых множествах и доказывают, что локальный минимум в таком случае является и глобальным<sup>1)</sup>. Таким образом в математическом программировании возникает раздел *выпуклого программирования* (ВП), эффективным способом решения задач которого является рассмотренный ранее метод внутренней точки (1.27).

Частью ВП является *геометрическое программирование* (ГП), открытое в 1961 г. К. Зенером [90]. В задаче ГП как целевая функция, так и ограничения являются *позиномами* (суммами *мономов*):

$$f(\{x\}) = \sum_i a_i \prod_j x_j^{b_{ij}}, \{x\} \geq 0, a_i \geq 0, b_{ij} \in \mathbb{R}. \quad (1.48)$$

Методы решения задач ГП, включающие двойственные методы, были разработаны Зенером совместно с Р. Даффином и Э. Питерсоном [91] в течение 1960-х гг. Именно с привлечением этих методов в работе [3] удалось аналитически решить задачу минимизации массы свободно опертой балки различных типов профилей.

<sup>1)</sup> В оригинальной статье Кун и Таккер доказали, что для вогнутой функции на выпуклом множестве локальный максимум является глобальным, что эквивалентно приведенной в тексте формулировке.



Помимо ГП развитие также получает *квадратичное программирование* (КП), которое является естественным расширением ЛП. В задаче КП целевая функция принимает квадратичный вид, а ограничения остаются аффинными:

$$f(\{x\}) = \frac{1}{2}\{x\}^T[C]\{x\} + \{d\}^T\{x\} \rightarrow \min_{\{x\} \in \mathbb{R}^n}, \quad (1.49)$$

$$[A]\{x\} \leq \{b\}. \quad (1.50)$$

Если матрица  $[C]$  является положительно определённой, то такая задача КП является частным случаем задачи ВП. Для решения задачи КП в 1960 г. Ф. Вульф [92] предлагает модификацию симплекс-метода, которую в 1963 году Данциг [93] развивает и переносит на решение задач ВП.

### 1.2.1.2.3 Нелинейное программирование

Весьма популярным подходом к решению задач НЛП стал *метод последовательного квадратичного программирования* (ПКП), впервые рассмотренный в 1963 году Р. Вилсоном [94] и получивший развитие в 1970-х и 1980-х гг. в работах С.-П. Хана [95], М. Пауэлла [96] и К. Шиттковски [97]. Суть метода состоит в том, чтобы заменить решение задачи НЛП на решение последовательности задач КП, в каждой из которых исходная целевая функция  $f$  аппроксимируется квадратичным приближением  $\tilde{f}$  в текущей (фиксированной) точке  $\{x_0\}$ , а ограничения  $\{g\}$  и  $\{h\}$  в этой точке линеаризуются:

$$\tilde{f}(\{\Delta x\}) = f + \nabla f\{\Delta x\} + \frac{1}{2}\{\Delta x\}^T[\nabla^2 f]\{\Delta x\} \rightarrow \min_{\{\Delta x\} \in \mathbb{R}^n}, \quad (1.51)$$

$$\{\tilde{g}\}(\{\Delta x\}) = \{g\} + [G]\{\Delta x\} \leq 0, \quad (1.52)$$

$$\{\tilde{h}\}(\{\Delta x\}) = \{h\} + [H]\{\Delta x\} = 0, \quad (1.53)$$

где  $f$ ,  $\nabla f$  и  $[\nabla^2 f]$  – соответственно значения функции  $f$ , её градиента и матрицы Гессе в точке  $\{x_0\}$ ;  $[G] = [\nabla\{g\}]$  и  $[H] = [\nabla\{h\}]$  – матрицы Якоби соответственно функций  $\{g\}$  и  $\{h\}$  в точке  $\{x_0\}$ . Запишем необходимые условия ККТ существования минимума в форме (1.17), (1.19) и (1.20):

$$\begin{cases} \nabla_{\{x\}}L^T = \nabla f^T + [G]^T\{\lambda\} + [H]^T\{\mu\} = \{0\}_{n \times 1}, \\ \{h\} = \{0\}_{N_h \times 1}, \\ \{\lambda g\} = \text{diag}\{\lambda\}\{g\} = \text{diag}\{g\}\{\lambda\} = \{0\}_{N_g \times 1}. \end{cases} \quad (1.54)$$

Эту систему уравнений можно записать в векторной форме

$$\{F\}(\{Y\}) = \{0\}_{(n+N_h+N_g) \times 1}, \quad (1.55)$$

где

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} \nabla_{\{x\}}L^T \\ \{h\} \\ \{\lambda g\} \end{Bmatrix}, \quad \{Y\} = \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{\mu\} \\ \{\lambda\} \end{Bmatrix}. \quad (1.56)$$

Для её решения общепринято использовать *метод Ньютона* или его модификации. Это итерационный метод, в котором функция  $\{F\}$  заменяется своим линейным приближением. На  $j$ -

м шаге такое приближение выглядит следующим образом:

$$\{F\}(\{Y\}_j) + [\nabla\{F\}(\{Y\}_j)]\{\Delta Y\}_j = \{0\}, \quad (1.57)$$

откуда, введя обозначения  $\{F\}_j = \{F\}(\{Y\}_j)$  и  $[\nabla\{F\}]_j = [\nabla\{F\}(\{Y\}_j)]$ , получаем

$$[\nabla\{F\}]_j\{\Delta Y\}_j = -\{F\}_j, \quad (1.58)$$

где в рассматриваемом случае с учётом выражений (1.51), (1.54) и линеаризации ограничений (1.52)–(1.53)

$$[\nabla\{F\}] = \begin{bmatrix} [\nabla_{\{x\}\{x\}}^2 L] & [\nabla_{\{x\}\{\mu\}}^2 L] & [\nabla_{\{x\}\{\lambda\}}^2 L] \\ [\nabla_{\{x\}\{h\}}] & [\nabla_{\{\mu\}\{h\}}] & [\nabla_{\{\lambda\}\{h\}}] \\ [\nabla_{\{x\}\{\lambda g\}}] & [\nabla_{\{\mu\}\{\lambda g\}}] & [\nabla_{\{\lambda\}\{\lambda g\}}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\nabla^2 f] & [H]^T & [G]^T \\ [H] & 0 & 0 \\ \text{diag}\{\lambda\} [G] & 0 & \text{diag}\{g\} \end{bmatrix}. \quad (1.59)$$

Подстановка полученной матрицы Якоби функции  $\{F\}$  (1.59) в итерационное уравнение (1.58) приводит его к виду

$$\begin{bmatrix} [\nabla^2 f] & [H]^T & [G]^T \\ [H] & 0 & 0 \\ \text{diag}\{\lambda\} [G] & 0 & \text{diag}\{g\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta x\} \\ \{\Delta \mu\} \\ \{\Delta \lambda\} \end{Bmatrix}_j = - \begin{Bmatrix} \nabla_{\{x\}} L^T \\ \{h\} \\ \{\lambda g\} \end{Bmatrix}_j, \quad (1.60)$$

где первое уравнение системы можно выписать в явной форме

$$[\nabla^2 f]_j \{\Delta x\}_j + [H]_j^T \{\Delta \mu\}_j + [G]_j^T \{\Delta \lambda\}_j = -\nabla f_j^T - [G]_j^T \{\lambda\}_j - [H]_j^T \{\mu\}_j, \quad (1.61)$$

откуда после приведения подобных слагаемых получаем

$$[\nabla^2 f]_j \{\Delta x\}_j + [H]_j^T \{\mu\}_{j+1} + [G]_j^T \{\lambda\}_{j+1} = -\nabla f_j^T. \quad (1.62)$$

Аналогичные рассуждения можно провести с последним уравнением системы (1.60):

$$\text{diag}\{\lambda\}_j [G]_j \{\Delta x\}_j + \text{diag}\{g\}_j \{\Delta \lambda\}_j = -\{\lambda g\}_j = -\text{diag}\{g\}_j \{\lambda\}_j, \quad (1.63)$$

откуда

$$\text{diag}\{\lambda\}_j [G]_j \{\Delta x\}_j + \text{diag}\{g\}_j \{\lambda\}_{j+1} = 0. \quad (1.64)$$

В результате итерационное уравнение (1.60) приобретает вид

$$\begin{Bmatrix} \{\Delta x\}_j \\ \{\mu\}_{j+1} \\ \{\lambda\}_{j+1} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} [\nabla^2 f] & [H]^T & [G]^T \\ [H] & 0 & 0 \\ \text{diag}\{\lambda\} [G] & 0 & \text{diag}\{g\} \end{bmatrix}_j^{-1} \begin{Bmatrix} \nabla f_j^T \\ \{h\} \\ 0 \end{Bmatrix}_j, \quad (1.65)$$

где обратная матрица вычисляется по формуле Фробениуса [98]

$$[\nabla\{F\}]^{-1} = \begin{bmatrix} \overbrace{[\nabla^2 f] \quad [H]^T}^A & \overbrace{[G]^T}^B \\ \underbrace{[H] \quad 0}_C & \underbrace{0}_{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1} B E^{-1} C A^{-1} & -A^{-1} B E^{-1} \\ -E^{-1} C A^{-1} & E^{-1} \end{bmatrix}, \quad (1.66)$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} [\nabla^2 f] & [H]^T \\ [H] & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & [H]^{-1} \\ [H]^{-T} & -[H]^{-T} [\nabla^2 f] [H]^{-1} \end{bmatrix}, \quad (1.67)$$

$$E = D - CA^{-1}B = D - [\text{diag}\{\lambda\} [G] \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & [H]^{-1} \\ [H]^{-T} & -[H]^{-T}[\nabla^2 f][H]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [G]^T \\ 0 \end{bmatrix} = \text{diag}\{g\}, \quad (1.68)$$

что в итоге даёт

$$[\nabla\{F\}]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & [H]^{-1} & 0 \\ [H]^{-T} & [H]^{-T} \left( [G]^T \text{diag}\left\{\frac{\lambda}{g}\right\} [G] - [\nabla^2 f] \right) [H]^{-1} & -[H]^{-T} [G]^T \text{diag}\left\{\frac{1}{g}\right\} \\ 0 & -\text{diag}\left\{\frac{\lambda}{g}\right\} [G][H]^{-1} & \text{diag}\left\{\frac{1}{g}\right\} \end{bmatrix}. \quad (1.69)$$

При этом чаще всего матрица Гессе  $[\nabla^2 f]$  не вычисляется напрямую, а выполняется её приближённая оценка по алгоритму Бroyдена – Флетчера – Гольдфарба – Шанно (BFGS) [99]:

$$[\nabla^2 \tilde{f}]_{j+1} = [\nabla^2 \tilde{f}]_j + \left( 1 + \frac{\{\Delta\phi\}_j [\nabla^2 \tilde{f}]_j \{\Delta\phi\}_j^T}{\{\Delta\phi\}_j \{\Delta x\}_j} \right) \frac{\{\Delta x\}_j \{\Delta x\}_j^T}{\{\Delta\phi\}_j \{\Delta x\}_j} - \frac{\{\Delta x\}_j \{\Delta\phi\}_j [\nabla^2 \tilde{f}]_j + [\nabla^2 \tilde{f}]_j \{\Delta\phi\}_j^T \{\Delta x\}_j^T}{\{\Delta\phi\}_j \{\Delta x\}_j}, \quad (1.70)$$

где

$$\{\Delta\phi\}_j = \nabla f_{j+1} - \nabla f_j = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}(\{x\}_{j+1}) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\{x\}_j), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\{x\}_{j+1}) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\{x\}_j), \dots \right\}. \quad (1.71)$$

В общем случае переход в следующую точку  $\{x\}_{j+1}$  осуществляется в направлении  $\{\Delta x\}_j$  с шагом  $\gamma$ :

$$\{x\}_{j+1} = \{x\}_j + \gamma \{\Delta x\}_j, \quad (1.72)$$

где в классическом методе Ньютона  $\gamma \equiv 1$ , а в квазиньютоновских методах этот шаг либо минимизирует значение функции  $f$  в найденном направлении  $\{\Delta x\}_j$

$$\gamma = \underset{\gamma \in \mathbb{R}}{\text{argmin}} f(\{x\}_j + \gamma \{\Delta x\}_j), \quad (1.73)$$

либо, вместо выполнения одномерной минимизации, используется правило Армихо или ему подобное, в котором величина  $\gamma$  определяется итерационно по заранее выбранному ограничению на производную  $f'_\gamma(\{x\}_j + \gamma \{\Delta x\}_j)$ .

Описанный метод ПКП реализован в разработанном К. Шиттковски алгоритме NLPQL<sup>1)</sup>, а также в разработанном О. Экслером, Т. Леманном и К. Шиттковски алгоритме MISQP<sup>2)</sup>, в котором для целочисленных переменных используется метод ветвей и резки, объединивший в себе упомянутые ранее метод отсечения и метод ветвей и границ. Оба алгоритма нашли своё применение в ПК ANSYS Workbench.

Необходимо отметить, что в задачах оптимизации судовых конструкций ограничения  $\{g\}$  и  $\{h\}$  зачастую являются высоко нелинейными. Поэтому вместо линеаризации (1.52)–(1.53)

<sup>1)</sup> Nonlinear Programming by Quadratic Lagrangian, нелинейное программирование квадратичным приближением функции Лагранжа.

<sup>2)</sup> Mixed-Integer Sequential Quadratic Programming, смешанно-целочисленное последовательное квадратичное программирование.

предлагается рассматривать их квадратичные приближения

$$\{\tilde{g}\}(\{\Delta x\}) = \{g\} + [G]\{\Delta x\} + \frac{1}{2}\{\Delta x\}^T[\nabla G]\{\Delta x\} \leq 0, \quad (1.74)$$

$$\{\tilde{h}\}(\{\Delta x\}) = \{h\} + [H]\{\Delta x\} + \frac{1}{2}\{\Delta x\}^T[\nabla H]\{\Delta x\} = 0, \quad (1.75)$$

которые приводят к следующему виду матрицы Якоби функции  $\{F\}$ :

$$[\nabla\{F\}] = \begin{bmatrix} [\nabla^2 f] + [\nabla H] + [\nabla G] & [H]^T & [G]^T \\ [H] & 0 & 0 \\ \text{diag}\{\lambda\} [G] & 0 & \text{diag}\{g\} \end{bmatrix}, \quad (1.76)$$

что может ускорить сходимость метода или повысить вероятность нахождения глобального минимума, хотя и потребует вычислений матриц  $[\nabla H]$  и  $[\nabla G]$ , которые, как и в случае с матрицей  $[\nabla^2 f]$ , можно выполнять по алгоритму BFGS (1.70).

## 1.2.2 Топологическая оптимизация

### 1.2.2.1 Задача топологической оптимизации

#### 1.2.2.1.1 Формулировка

Предположим, что у нас имеется некоторая компактная область  $\Omega$  в евклидовом двумерном или трёхмерном пространстве и определённое количество «строительного» материала (его масса  $M_0$  или объём  $V_0$ ). Пусть нам также заданы внешние силы (поверхностные или объёмные), действующие на указанную область  $\Omega$ . Задача топологической оптимизации (ТО) состоит в том, что из имеющегося «строительного» материала требуется «слепить» конструкцию внутри области  $\Omega$  так, чтобы при действии заданных внешних сил она имела наилучшие характеристики (см. рис. 1.4).

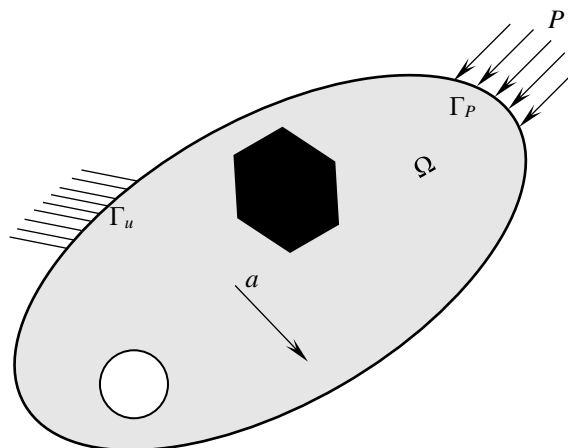


Рис. 1.4 – Задача ТО:  $\Omega$  – область проектирования;  $P$  – поверхностная нагрузка;  $a$  – объёмная нагрузка;  $\Gamma_P$  – поверхность приложения нагрузки;  $\Gamma_u$  – поверхность граничных условий;  $\circ$  – область, которая должна быть пустой;  $\bullet$  – область, которая должна быть сплошной

В классической задаче ТО под «наилучшими характеристиками» понимают минимизацию потенциальной энергии деформации  $U$  (работу внутренних сил). Здесь удобно ввести в рассмотрение конфигурационное пространство системы материальных частиц. Пусть

$\Theta$  – множество всех допустимых конфигураций частиц материала внутри области  $\Omega$ , а  $\vartheta \subset \Omega$  – некоторая допустимая конфигурация. Тогда задачу ТО можно сформулировать следующим образом:

$$U(\vartheta) \rightarrow \min_{\vartheta \in \Theta} \quad (1.77)$$

при ограничении на массу материала

$$M_{min} \leq \int_{V(\vartheta)} \rho dV \leq M_{max}, \quad (1.78)$$

где  $\rho$  – плотность материала (вообще говоря, внутри области  $\Omega$  она может быть непостоянной);

$V$  – объём, занимаемый конфигурацией  $\vartheta$ ;

$M_{max}, M_{min}$  – соответственно наибольшая и наименьшая допускаемые массы материала (при  $M_{max} = M_{min} = M_0$  ограничение (1.78) становится ограничением-равенством).

При  $\rho \equiv \text{const}$  ограничение (1.78) эквивалентно ограничению на объём материала.

С точки зрения прочности весьма актуальным является вопрос ограничения наибольших напряжений и перемещений, а также отстройки от резонансных частот. Поэтому к задаче (1.77)–(1.78) часто добавляют следующие ограничения:

$$\max_{r \in \vartheta} \sigma(r) \leq \sigma_{max}, \quad (1.79)$$

$$\max_{r \in \vartheta} u(r) \leq u_{max}, \quad (1.80)$$

$$f_{min} \leq f(\vartheta) \leq f_{max}, \quad (1.81)$$

где  $r$  – материальная точка (частица материала), принадлежащая конфигурации  $\vartheta$ ;

$\sigma$  – напряжение в материальной точке  $r$  (чаще всего применяется напряжение по Мизесу, однако это может быть и некоторая конкретная компонента тензора напряжений  $\sigma$  или их комбинация);

$u$  – перемещение материальной точки  $r$  (это может быть как полное перемещение, так и перемещение вдоль заданного направления);

$f$  – собственная частота конфигурации  $\vartheta$ , имеющая верхнее ограничение  $f_{max}$  и нижнее ограничение  $f_{min}$ .

При решении задач ТО помимо перечисленных ограничений активно используют ограничения на возникающие силы реакций или её максимальную температуру (если имеются тепловые нагрузки).

Задачу ТО удобно рассматривать в случае, когда сопутствующая прочностная задача является статической и линейной. В этом случае работа  $U$  внутренних сил не зависит от пути нагружения и при использовании МКЭ может быть записана в виде:

$$U(\vartheta) = \frac{1}{2}\{u(\vartheta)\}^T [K(\vartheta)] \{u(\vartheta)\}, \quad (1.82)$$

где  $[K]$  – полная матрица жёсткости конечных элементов (2.20), положительно определённая и симметричная для линейной статической задачи [98]:

$$[K]^T = [K], [K]^{-1} = ([K]^T)^{-1} = ([K]^{-1})^T = [K]^{-T}; \quad (1.83)$$

$\{u\}$  – вектор узловых перемещений, который связан с вектором  $\{F\}$  узловых сил уравнением статического равновесия (2.19):

$$[K]\{u\} = \{F\} = \{F^a\} + \{F^r\}; \quad (1.84)$$

$\{F^a\}$  – вектор приложенных внешних нагрузок (узловых, объёмных, поверхностных и тепловых);

$\{F^r\}$  – вектор сил реакций.

Уравнение (1.84) содержит в себе граничные условия. Выразим из него вектор узловых перемещений  $\{u\}$ , воспользовавшись симметричностью матрицы жёсткости  $[K]$  (1.83):

$$\{u\} = [K]^{-1}\{F\} \Rightarrow \{u\}^T = \{F\}^T [K]^{-T} = \{F\}^T [K]^{-1}. \quad (1.85)$$

После подстановки (1.85) в (1.82) получаем

$$U(\vartheta) = \frac{1}{2}\{F(\vartheta)\}^T \{u(\vartheta)\}. \quad (1.86)$$

При решении задач ТО часть конструкции, на которую наложены граничные условия, обыкновенно является неизменяемой (неоптимизируемой), ровно как и часть конструкции, к которой приложены поверхностные или точечные силы. Поэтому в отсутствии объёмных или тепловых нагрузок вектор  $\{F\}$  меняется слабо при переходе от одной конфигурации к другой. Отсюда минимизация потенциальной энергии деформации  $U$  с учётом выражения (1.86) почти равносильна минимизации вектора  $\{u\}$  узловых перемещений (при этом вектор  $\{F\}$  играет роль весового вектора  $\{w\}$ ). По этой причине в задачах ТО минимизацию потенциальной энергии деформации часто называют *минимизацией податливости конструкции*, которую обозначают  $C$ . При решении задачи ТО константу  $\frac{1}{2}$ , естественно, можно не учитывать.

Комбинируя (1.86) и (1.85), окончательно получаем следующую формулировку задачи ТО:

$$C(\vartheta) = \{F\}^T [K(\vartheta)]^{-1} \{F\} \rightarrow \min_{\vartheta \in \Theta} \quad (1.87)$$

при ограничении (1.78) и, возможно, ограничениях (1.79)–(1.81). Иногда в целях упрощения получающейся структуры добавляют ограничения на периметр (площадь поверхности) конструкции или на минимальный размер её элемента. При этом полная матрица жёсткости  $[K]$  (2.20) является суммой матриц жёсткости  $[K_e]$  (2.18) отдельных конечных элементов:

$$[K(\vartheta)] = \sum_{e=1}^{N_{elem}} [K_e(\vartheta)]. \quad (1.88)$$

Заметим, что целевую функцию (1.87) можно переписать в виде

$$C(\vartheta) = \|\{F\}\|^2 \{\bar{F}\}^T [K(\vartheta)]^{-1} \{\bar{F}\}, \quad (1.89)$$

где  $\{\bar{F}\}$  – единичный вектор нагрузок (в смысле заданной нормы). Следовательно, при решении задачи ТО с минимизацией податливости и отсутствии ограничений по напряжениям и деформациям достаточно прикладывать единичные нагрузки. Аналогично, если в конструкции присутствует только один изотропный материал, то его модуль Юнга  $E$  можно вынести из полной матрицы жёсткости (1.88):

$$C(\vartheta) = E\{F\}^T[\bar{K}(\vartheta)]^{-1}\{F\}, \quad (1.90)$$

где  $[\bar{K}]$  – полная матрица жёсткости при единичном модуле упругости материала. Поэтому в задаче минимизации податливости с единственным изотропным материалом величина его модуля Юнга не играет роли, если отсутствуют ограничения по напряжениям, деформациям и собственным частотам.

Необходимо отметить, что даже если вектор нагрузок  $\{F\}$  не зависит от конфигурации  $\vartheta$ , то при наличии, например, двух расчётных случаев с линейно независимыми векторами нагрузок  $\{F_1\}$  и  $\{F_2\}$  податливость  $C$  при их совместном действии принимает вид

$$\begin{aligned} C &= (\{F_1\}^T + \{F_2\}^T)[K]^{-1}(\{F_1\} + \{F_2\}) = \\ &= \underbrace{\{F_1\}^T[K]^{-1}\{F_1\}}_{C_1} + \underbrace{\{F_1\}^T[K]^{-1}\{F_2\}}_{C_{12}} + \underbrace{\{F_2\}^T[K]^{-1}\{F_1\}}_{C_{21}} + \underbrace{\{F_2\}^T[K]^{-1}\{F_2\}}_{C_2} = \\ &= C_1 + C_{12} + C_{21} + C_2 = \{1\}^T\{C\} + 2C_{12}, \end{aligned} \quad (1.91)$$

поскольку

$$C_{21} = C_{12}^T = (\{F_2\}^T[K]^{-1}\{F_1\})^T = \{F_1\}^T[K]^{-1}\{F_2\} = C_{12}, \quad (1.92)$$

где  $\{C\}$  – вектор податливостей:

$$\{C\} = \{C_1 \quad C_2\}^T. \quad (1.93)$$

Таким образом, при наличии нескольких расчётных случаев многоцелевая оптимизация по схеме (1.33) или (1.35) не является эквивалентной одноцелевой оптимизации при одновременном действии сразу всех расчётных случаев. Для выполнения многоцелевой ТО предлагается использовать алгоритм, схема которого показана на рис. 1.5.

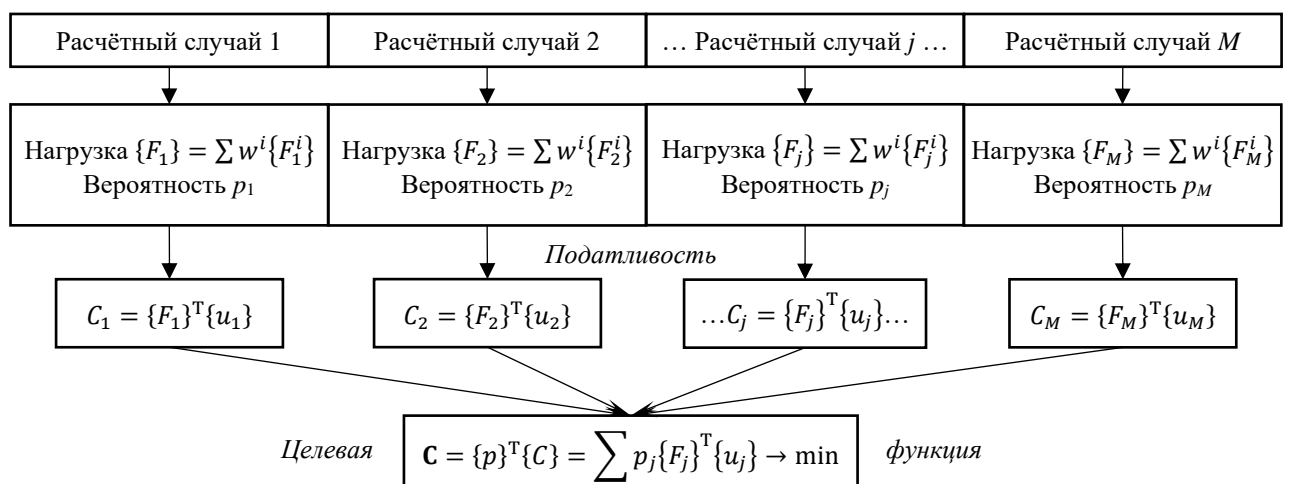


Рис. 1.5 – Схема разработанного алгоритма выполнения многоцелевой ТО

Сначала нагрузки разделяются на пересекающиеся и непересекающиеся во времени. В первом случае, когда возможно одновременное действие двух или более различных (линейно независимых) нагрузок, необходимо выполнять ТО при действии взвешенной суммы их расчётных величин. При этом весовые коэффициенты  $\{w\}$  должны отражать обеспеченность каждой нагрузки или соответствовать требованиям нормативных документов. Во втором случае, когда нагрузки разнесены во времени, необходимо решать многоцелевую задачу ТО с вектором целевых функций податливости от каждой расчётной нагрузки в отдельности по примеру (1.93). В этом случае рекомендуется минимизировать взвешенную сумму податливостей, где весовые коэффициенты  $\{p\}$  должны отражать вероятность появления каждого расчётного случая.

#### 1.2.2.1.2 Классические примеры

Первым примером задачи ТО является оптимизация консольной балки, нагруженной вертикальной силой, приложенной к середине её свободного конца [100, 101, 102]. Постановка задачи и результаты, полученные методом SIMP, показаны на рис. 1.6 (описание метода SIMP, метода критериев оптимальности (МКО), последовательного выпуклого программирования (ПВП) и подхода увеличения штрафного параметра  $p$  приведены в п.1.2.2.2.2).

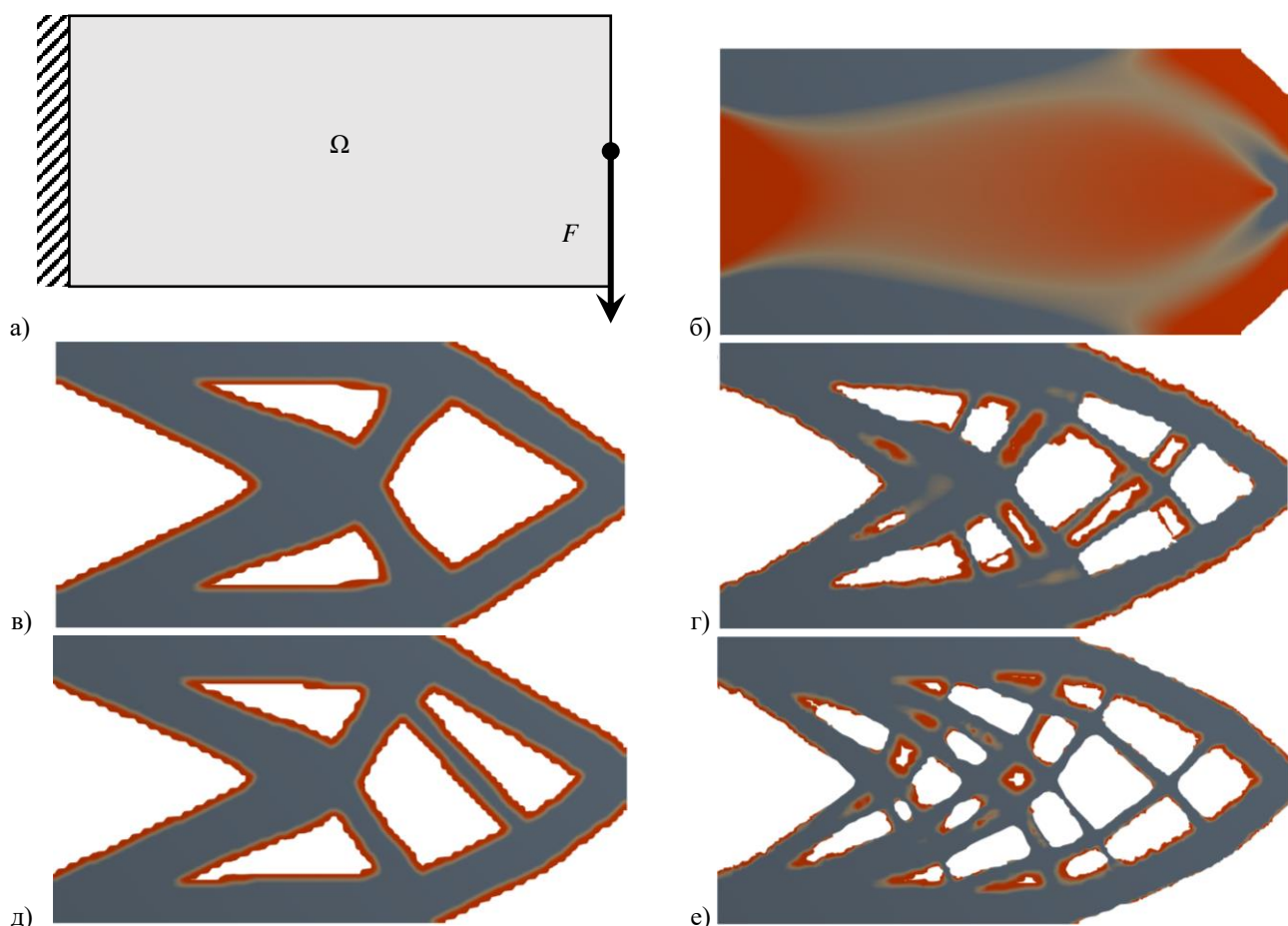


Рис. 1.6 – ТО короткой консольной балки методом SIMP (остаточная масса 50%): а) постановка задачи; б) МКО с  $p = 1,00$ ; в) МКО с  $p = 3,08$ ; г) МКО с подходом увеличения параметра до  $p = 3,08$ ; д) ПВП с  $p = 3,08$ ; е) ПВП с  $p = 3,08$  и подходом постепенного уменьшения массы



На рис. 1.7 показан пример ТО трёхмерного варианта консольной балки, нагруженной в центре свободной грани вертикальной силой и крутящим моментом в различных сочетаниях.

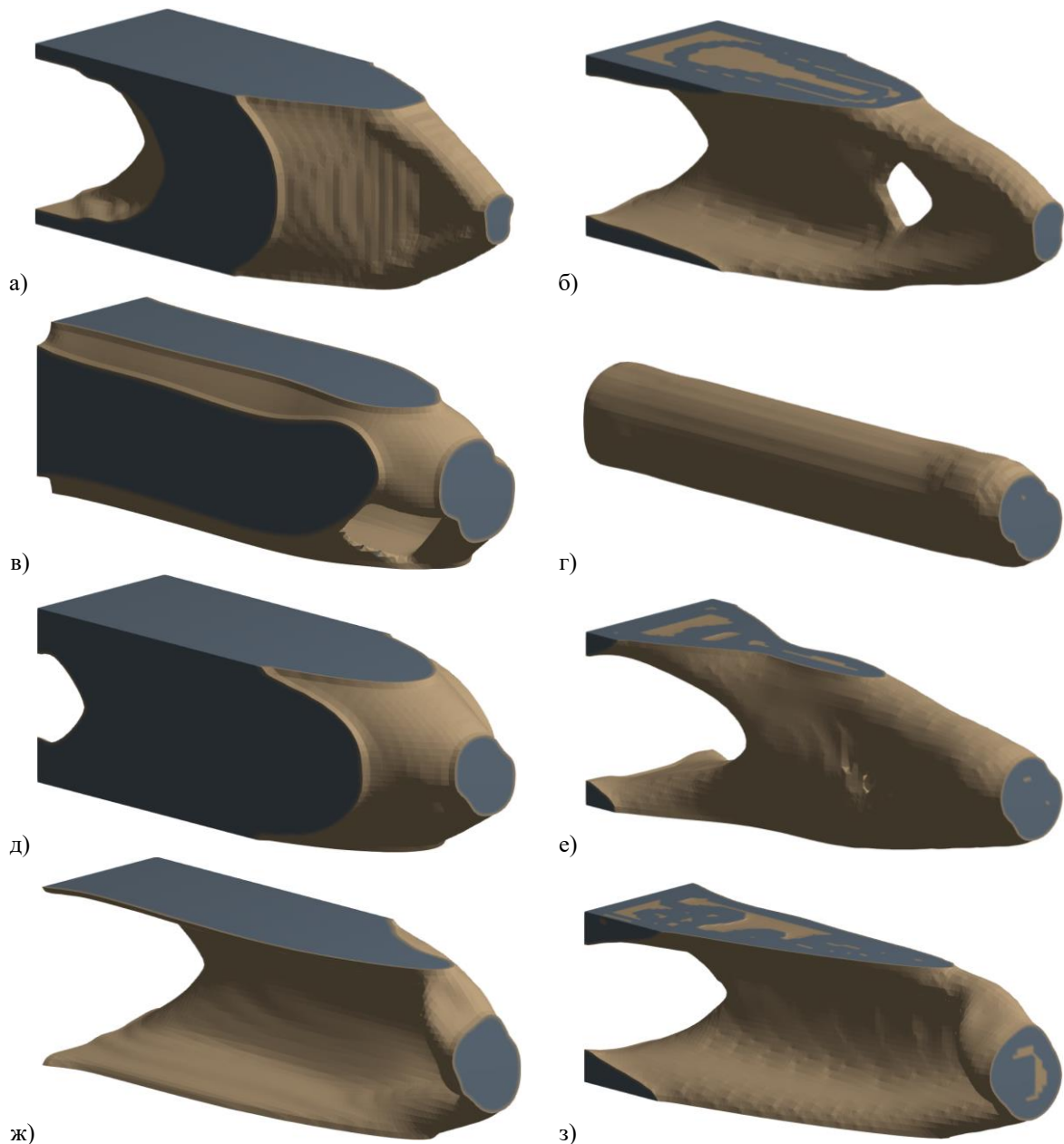


Рис. 1.7 – ТО короткой консольной балки (остаточная масса 25 %), нагруженной в центре свободной грани  
 - вертикальной силой 1 Н: а) SIMP ПВП ( $p = 3,0$ ); б) LS;  
 - крутящим моментом 1 Н·м: в) SIMP ПВП ( $p = 3,0$ ); г) LS;  
 - вертикальной силой 1 Н и крутящим моментом 31 Н·м по отдельности: д) SIMP ПВП ( $p = 3,0$ ); е) LS;  
 - вертикальной силой 1 Н и крутящим моментом 31 Н·м одновременно: ж) SIMP ПВП ( $p = 3,0$ ); з) LS

Вторым классическим примером задачи ТО является оптимизация свободно опертой балки, известной как MBV-балка (Messerschmitt – Bolkow – Blohm), которая нагружена вертикальной силой сверху посередине пролёта [102, 103, 104]. Постановка задачи и результаты, полученные методом SIMP, показаны на рис. 1.8.

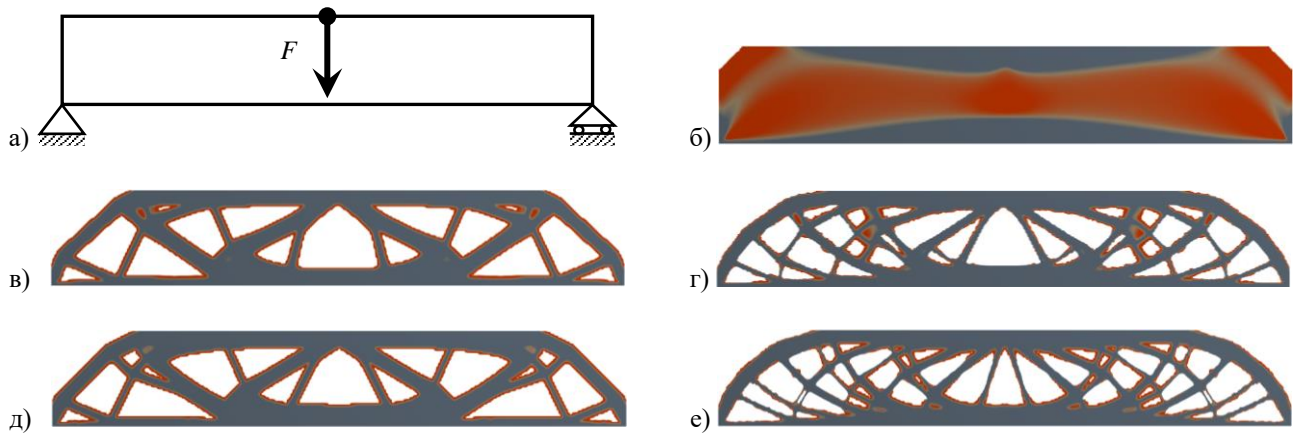


Рис. 1.8 – ТО свободно опертой балки методом SIMP (остаточная масса 50%): а) постановка задачи; б) МКО с  $p = 1,00$ ; в) МКО с  $p = 3,08$ ; г) МКО с подходом увеличения параметра до  $p = 3,08$ ; д) ПВП с  $p = 3,08$ ; е) ПВП с  $p = 3,08$  и подходом постепенного уменьшения массы

### 1.2.2.2 Классификация методов топологической оптимизации

Все существующие методы ТО основаны на том или ином способе описания допускаемой конфигурации  $\vartheta$  частиц материала, и их можно разделить на две группы:

- 1) методы, использующие для описания допускаемой конфигурации её характеристическую функцию  $\chi$ ;
- 2) методы, описывающие допускаемую конфигурацию через её границу  $\partial\vartheta$ .

Применяемую в методах первой группы характеристическую функцию  $\chi$  в задачах ТО принято называть *псевдоплотностью* материала:

$$\chi_{\vartheta}(r) = \begin{cases} 1 & r \in \vartheta, \\ 0 & r \notin \vartheta. \end{cases} \quad (1.94)$$

При использовании МКЭ материальной точке  $r$  будет соответствовать конечный элемент с некоторым номером  $e = 1, \dots, N_{elem}$ , где  $N_{elem}$  – общее число конечных элементов, а условие (1.94) запишется в виде:

$$\chi_e = \begin{cases} 1 & \text{сплошной материал,} \\ 0 & \text{пустота.} \end{cases} \quad (1.95)$$

Все  $\chi_e$  образуют вектор  $\{\chi\}$  переменных проектирования, принимающих дискретные значения 1 или 0. Последнее обстоятельство затрудняет решение оптимизационной задачи, поскольку на текущий момент времени существующие алгоритмы решения задач дискретного программирования, во-первых, имеют крайне низкую скорость сходимости (которая, к тому же, очень сильно зависит от размера задачи), и, во-вторых, в них отсутствуют чёткие критерии оптимума.

Указанные выше недостатки наталкивают исследователей на ослабление условия (1.95) путём применения непрерывной псевдоплотности материала:

$$\chi_{\vartheta}: \Omega \rightarrow [0; 1], \quad (1.96)$$

где значения  $0 < \chi < 1$  соответствуют «серой» области перехода от сплошного материала к пустоте. С одной стороны, непрерывность псевдоплотности позволяет использовать градиентные

методы решения оптимизационных задач, которые имеют как чёткие критерии оптимума, так и высокую скорость сходимости, слабо зависящую от размера задачи. Но, с другой стороны, непрерывность псевдоплотности придаёт границе  $\partial\vartheta$  меру, отличную от нуля (ненулевой объём), что делает границу получающейся конструкции размытой (см. рис. 1.6 и рис. 1.8). В существующей практике принято считать, что поверхность уровня  $\chi = 0,5$  соответствует границе полученной оптимальной конструкции.

Использование характеристической функции (1.94) или псевдоплотности (1.96) позволяет переписать ограничение (1.78) в форме

$$M_{min} \leq \int_{\Omega} \rho \chi_{\vartheta} d\Omega \leq M_{max}, \quad (1.97)$$

откуда при постоянной плотности  $\rho$  получается ограничение на объём материала

$$V_{min} \leq \int_{\Omega} \chi_{\vartheta} d\Omega \leq V_{max}. \quad (1.98)$$

Поскольку методы первой группы обладают явными недостатками, исследователями были разработаны методы второй группы, в которых конфигурация  $\vartheta$  описывается через свою границу  $\partial\vartheta$ , являющуюся поверхностью нулевого уровня некоторой непрерывной функции  $\phi$ :

$$\phi_{\vartheta}(r) \begin{cases} > 0 & r \in \vartheta \setminus \partial\vartheta, \\ = 0 & r \in \partial\vartheta, \\ < 0 & r \notin \vartheta, \end{cases} \quad (1.99)$$

откуда легко выразить псевдоплотность

$$\chi_{\vartheta}(r) = \begin{cases} 1 & \phi_{\vartheta}(r) \geq 0, \\ 0 & \phi_{\vartheta}(r) < 0. \end{cases} \quad (1.100)$$

Непрерывность функции  $\phi$  позволяет использовать градиентные методы, при этом граница конструкции имеет чёткий контур, поскольку по определению описывается поверхностью уровня  $\phi = 0$ . Однако здесь возникает проблема зарождения новых дыр в процессе эволюции границы, которая решается различными трудоёмкими способами.

#### 1.2.2.2.1 Методы с дискретной псевдоплотностью

Одним из первых методов ТО с дискретной псевдоплотностью является метод Evolutionary Structural Optimization<sup>1)</sup> (ESO), разработанный Ю.М. Сё и Г. Стивенсом в начале 1990-х [105, 106, 107]. Он основан на идее постепенного удаления неэффективного материала из конструкции в соответствии со значениями потенциальной энергии деформации в конечных элементах. Предполагается, что благодаря такому процессу полученная конструкция будет эволюционировать в направлении оптимальной формы и топологии. К достоинствам метода ESO

<sup>1)</sup> Эволюционная оптимизация конструкции (ЭОК).

можно отнести простоту его реализации и возможность самостоятельного внедрения в коммерческие программные пакеты для расчётов с использованием МКЭ, а получаемая в результате оптимизации конструкция имеет чёткие границы без серой переходной области. Метод ESO не требует перестроения конечноэлементной (КЭ) сетки, а по мере удаления конечных элементов число решаемых уравнений сокращается, что потенциально приводит к сокращению времени вычислений. К недостаткам метода ESO следует отнести зависимость от КЭ сетки, а также отсутствие гарантий оптимальности получаемого решения, поскольку материал, удалённый на ранних итерациях алгоритма, может потребоваться на более поздних итерациях для построения оптимальной конструкции, т.е. возможно преждевременное или ошибочное удаление материала [108].

Естественным развитием метода ESO стал метод Bi-directional Evolutionary Structural Optimization<sup>1)</sup> (BESO), который позволяет не только удалять, но и добавлять материал. Первые работы по методу BESO были выполнены Ю.М. Сё, Г. Стивенсом и О. Керингом в конце 1990-х [109, 110]. С тех пор этот метод претерпевал много изменений, нацеленных на борьбу с эффектом шахматной доски (угловым касанием сплошного материала) и на достижение устойчивой сходимости. Одна из успешных модификаций метода BESO представлена в работе С. Хуана и Ю.М. Сё [111], в которой показано, что введение фильтра, сглаживающего числа чувствительности конечных элементов по объёму, позволяет добиться независимости получаемых решений от КЭ сетки, а усреднение чисел чувствительности по итерациям – устойчивой сходимости метода на тестовых примерах [108]. Однако вопросы сходимости и нахождения глобального оптимума для общего случая остаются открытыми [112].

Рассмотренные выше так называемые «жёсткие» методы ESO/BESO являются методами с принудительным удалением конечных элементов. Помимо них также были разработаны «мягкие» методы ESO/BESO [113, 114], в которых вместо явного удаления конечных элементов им присваивается очень низкий модуль Юнга, имитирующий сверхподатливый материал. Подобный подход позволяет вычислять чувствительность к добавлению непосредственно в «пустых» конечных элементах, имеющих ненулевую потенциальную энергию деформации, а не экстраполировать чувствительность из соседних «сплошных» элементов [115]. Однако в ряде работ [108, 116] отмечается, что «мягкий» метод BESO по своей реализации и результатам очень близок к методу SIMP, рассматриваемому ниже.

#### 1.2.2.2.2 Методы с непрерывной псевдоплотностью

Одним из первых подходов с непрерывной псевдоплотностью материала стал метод Solid

---

<sup>1)</sup> Двухнаправленная эволюционная оптимизация конструкции (ДЭОК).

Isotropic Material with Penalization<sup>1)</sup> (SIMP), сформировавшийся в работах М. Бендшо [117], Г. Розвани и М. Жу [118] и др. (детальная историческая справка имеется в работе Розвани [119]). В этом методе жёсткость «серого» материала связана с его псевдоплотностью посредством степенного закона [102]:

$$E_e(\chi_e) = \chi_e^p E_0, \quad (1.101)$$

где  $E_e$  – текущий модуль Юнга конечного элемента с номером  $e$ ;

$E_0$  – модуль Юнга сплошного материала;

$\chi_e$  – псевдоплотность конечного элемента с номером  $e$ <sup>2)</sup>:

$$0 < \chi_{min} \leq \chi_e \leq 1; \quad (1.102)$$

$p \geq 1$  – параметр штрафа.

Полная матрица жёсткости (1.88) в этом случае выражается в виде

$$[K] = \sum_{e=1}^{N_{elem}} \chi_e^p [K_e^0], \quad (1.103)$$

где  $[K_e^0]$  – матрица жёсткости сплошного конечного элемента с номером  $e$ . Тогда задача ТО с целевой функцией податливости  $C$  в форме (1.86) может быть записана следующим образом:

$$C(\{\chi\}) = \{F\}^T \{u(\{\chi\})\} \rightarrow \min_{\{\chi\} \in [\chi_{min}; 1]^{N_{elem}}} \quad (1.104)$$

при ограничении (1.97)

$$M_{min} \leq \sum_{e=1}^{N_{elem}} \chi_e \underbrace{\rho_e V_e}_{m_e} \leq M_{max}, \quad (1.105)$$

где вектор перемещений  $\{u\}$  удовлетворяет условию (1.84) статического равновесия с учётом записи (1.103):

$$\left( \sum_{e=1}^{N_{elem}} \chi_e^p [K_e^0] \right) \{u(\{\chi\})\} = \{F\}. \quad (1.106)$$

Продифференцируем последнее выражение по  $\chi_e$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\sum_{e=1}^{N_{elem}} \chi_e^p [K_e^0])}{\partial \chi_e} \{u(\{\chi\})\} + \left( \sum_{e=1}^{N_{elem}} \chi_e^p [K_e^0] \right) \frac{\partial \{u(\{\chi\})\}}{\partial \chi_e} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left( \sum_{e=1}^{N_{elem}} \chi_e^p [K_e^0] \right) \frac{\partial \{u(\{\chi\})\}}{\partial \chi_e} = -p \chi_e^{p-1} [K_e^0] \{u(\{\chi\})\} \Rightarrow \end{aligned} \quad (1.107)$$

<sup>1)</sup> Твёрдый изотропный материал со штрафом (ТИМШ).

<sup>2)</sup> Для того, чтобы в задаче не возникали вырожденные матрицы жёсткости конечных элементов  $[K_e]$ , у псевдоплотности  $\chi_e$  имеется положительная нижняя граница  $\chi_{min}$ , что позволяет избежать перестроения КЭ сетки при появлении пустот.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \{u(\{\chi\})\}^T [K(\{\chi\})] \frac{\partial \{u(\{\chi\})\}}{\partial \chi_e} &= -p\chi_e^{p-1} \{u(\{\chi\})\}^T [K_e^0] \{u(\{\chi\})\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \{F\}^T \frac{\partial \{u(\{\chi\})\}}{\partial \chi_e} = -p\chi_e^{p-1} \{u(\{\chi\})\}^T [K_e^0] \{u(\{\chi\})\}, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{\partial C}{\partial \chi_e}(\{\chi\}) = \{F\}^T \frac{\partial \{u\}}{\partial \chi_e}(\{\chi\}) = -p\chi_e^{p-1} \{u(\{\chi\})\}^T [K_e^0] \{u(\{\chi\})\}. \quad (1.108)$$

Ограничения (1.102) и (1.105) можно написать в матричной форме:

$$\{\chi_{min}\} - \{\chi\} \leq 0, \{\chi\} - \{1\} \leq 0; \quad (1.109)$$

$$M_{min} - \{m\}^T \{\chi\} \leq 0, \{m\}^T \{\chi\} - M_{max} \leq 0. \quad (1.110)$$

Тогда регулярная функция Лагранжа (1.11) примет вид

$$\begin{aligned} L(\{\chi\}, \{\lambda\}, \{\mu\}) &= C(\{\chi\}) + \{\lambda^+\}^T (\{\chi\} - \{1\}) + \{\lambda^-\}^T (\{\chi_{min}\} - \{\chi\}) + \\ &+ \mu^+ (\{m\}^T \{\chi\} - M_{max}) + \mu^- (M_{min} - \{m\}^T \{\chi\}), \end{aligned} \quad (1.111)$$

а условия ККТ (1.17), (1.19) и (1.20) образуют систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla C(\{\chi\})^T + \{\lambda^+\} - \{\lambda^-\} + (\mu^+ - \mu^-) \{m\} = \{0\}_{N_{elem} \times 1}, \\ \{\lambda^+\}^T (\{\chi\} - \{1\}) = \{0\}_{N_{elem} \times 1}, \\ \{\lambda^-\}^T (\{\chi_{min}\} - \{\chi\}) = \{0\}_{N_{elem} \times 1}, \\ \mu^+ (\{m\}^T \{\chi\} - M_{max}) = 0, \\ \mu^- (M_{min} - \{m\}^T \{\chi\}) = 0, \end{array} \right. \quad (1.112)$$

содержащую  $3N_{elem} + 2$  уравнений и столько же неизвестных. Для промежуточных значений псевдоплотности ( $\chi_{min} < \chi_e < 1$ ) в силу условий дополняющей нежёсткости коэффициенты  $\lambda_e^+$  и  $\lambda_e^-$  равны нулю, откуда первое уравнение системы (1.112) с учётом (1.108) приобретает вид

$$p\chi_e^{p-1} \{u(\{\chi\})\}^T [K_e^0] \{u(\{\chi\})\} = (\mu^+ - \mu^-) m_e, \quad (1.113)$$

что позволяет ввести параметр невязки  $B_e$ , который на  $(k)$ -ом итерационном равен

$$B_e^{(k)} = \frac{p}{(\mu^+ - \mu^-) m_e} (\chi_e^{(k)})^{p-1} \{u(\{\chi\}_k)\}^T [K_e^0] \{u(\{\chi\}_k)\}. \quad (1.114)$$

При этом обновление псевдоплотности происходит по схеме [102]

$$\chi_e^{(k+1)} = \min \left\{ \max \left\{ \chi_e^{(k)} (B_e^{(k)})^\eta; (1 - \zeta) \chi_e^{(k)}; \chi_{min} \right\}; (1 + \zeta) \chi_e^{(k)}; 1 \right\}, \quad (1.115)$$

которая добавляет материал при  $B_e > 1$  и удаляет материал при  $B_e < 1$ , а при выходе псевдоплотности за границы устанавливает соответствующее граничное значение. Если  $B_e = 1$ , то для промежуточных значений псевдоплотности достигнут (локальный) минимум. В формуле (1.115) переменная  $\eta$  играет роль настроечного параметра, а  $\zeta$  является предельным шагом изменения псевдоплотности. Как видно, каждая переменная проектирования обновляется независимо от других, однако требуется пересчёт множителей Лагранжа  $\mu^+$  и  $\mu^-$  (а также тех  $\lambda_e^+$  и  $\lambda_e^-$ , у которых  $\chi_e = 1$  или  $\chi_e = \chi_{min}$ ), что на каждой итерации делается во внутреннем цикле путём

решения системы (1.112) методом Ньютона при фиксированном значении вектора переменных проектирования  $\{\chi\}_k$ . Описанный метод решения называют *методом критериев оптимальности*<sup>1)</sup> (МКО), который по своей формулировке применим только при наличии простых ограничений либо на массу, либо на объём материала.

Для решения задачи ТО при наличии более сложных ограничений (например, на величины деформаций, напряжений или собственных частот) используют итерационный *метод подвижных асимптот*<sup>2)</sup> (МПА), разработанный в 1987 г. К. Сванбергом [120]. В этом методе функция  $f$  в точке  $\{x^0\}$ , лежащей внутри гиперинтервала  $]\beta];\{\alpha]$ , аппроксимируется выпуклым приближением в форме

$$\tilde{f}(\{x\}) = \varphi_0 + \sum_{i=1}^n \left( \frac{a_i}{\alpha_i - x_i} + \frac{b_i}{x_i - \beta_i} \right), \quad (1.116)$$

где

$$a_i = \begin{cases} (\alpha_i - x_i^0)^2 \frac{\partial f_0}{\partial x_i} & \frac{\partial f_0}{\partial x_i} > 0, \\ 0 & \frac{\partial f_0}{\partial x_i} \leq 0 \end{cases} = \max \left\{ (\alpha_i - x_i^0)^2 \frac{\partial f_0}{\partial x_i}; 0 \right\}; \quad (1.117)$$

$$b_i = \begin{cases} 0 & \frac{\partial f_0}{\partial x_i} \geq 0, \\ -(x_i^0 - \beta_i)^2 \frac{\partial f_0}{\partial x_i} & \frac{\partial f_0}{\partial x_i} < 0 \end{cases} = \max \left\{ -(x_i^0 - \beta_i)^2 \frac{\partial f_0}{\partial x_i}; 0 \right\}; \quad (1.118)$$

$$\varphi_0 = f_0 - \sum_{i=1}^n \left( \frac{a_i}{\alpha_i - x_i^0} + \frac{b_i}{x_i^0 - \beta_i} \right), f_0 = f(\{x^0\}); \quad (1.119)$$

$\alpha_i$  и  $\beta_i$  – верхняя и нижняя границы соответственно, внутри которых аппроксимация (1.116) даёт разумное приближение. Легко видеть, что в точке  $\{x^0\}$  эта аппроксимация принимает точное значение  $f(\{x^0\})$ , а её производная

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} = \frac{a_i}{(\alpha_i - x_i)^2} + \frac{b_i}{(x_i - \beta_i)^2} \quad (1.120)$$

в этой точке совпадает с производной функции  $f$ , т.е. мы имеем линейное приближение исходной функции. Поскольку производная податливости (1.108) отрицательна, её аппроксимация (1.116) на итерационном шаге ( $k$ ) запишется в виде

$$\tilde{C}(\{x\}) = \varphi^{(k)} - \sum_{e=1}^{N_{elem}} \frac{b_e^{(k)}}{\chi_e - \beta_e} \frac{\partial C^{(k)}}{\partial \chi_e}, b_e^{(k)} = (\chi_e^{(k)} - \beta_e)^2, \quad (1.121)$$

где  $\beta_e < \chi_{min}$ , а компоненты градиента податливости  $C$  вычисляются по формуле (1.108). Рассмотрим случай ограничения-равенства

<sup>1)</sup> Optimality criteria method (OC method, OCM).

<sup>2)</sup> Method of moving asymptotes (MMA).

$$\sum_{e=1}^{N_{elem}} \chi_e m_e = M_{max}. \quad (1.122)$$

Это приводит к следующему виду регулярной функции Лагранжа (1.11):

$$\begin{aligned} L(\{\chi\}, \mu) &= \varphi_{(k)} - \sum_{e=1}^{N_{elem}} \frac{b_e^{(k)}}{\chi_e - \beta_e} \frac{\partial C_{(k)}}{\partial \chi_e} + \mu \left( \sum_{e=1}^{N_{elem}} \chi_e m_e - M_{max} \right) = \\ &= \varphi_{(k)} - \mu M_{max} + \sum_{e=1}^{N_{elem}} \left[ \frac{b_e^{(k)}}{\chi_e - \beta_e} \left( -\frac{\partial C_{(k)}}{\partial \chi_e} \right) + \mu \chi_e m_e \right] = \\ &= \varphi_{(k)} - \mu M_{max} + \sum_{e=1}^{N_{elem}} \ell_e(\chi_e, \mu). \end{aligned} \quad (1.123)$$

Поскольку полученная функция Лагранжа (1.123) является сепарабельной, её минимизацию можно выполнить поэлементно, что существенно ускоряет процесс оптимизации. Для этого используют подход с двойственной функцией Лагранжа  $W$ :

$$W(\mu) = \min_{\{\beta\} \leq \{\chi\} \leq \{1\}} L(\{\chi\}, \mu) = \varphi_{(k)} - \mu M_{max} + \sum_{e=1}^{N_{elem}} W_e(\mu), \quad (1.124)$$

где

$$W_e(\mu) = \min_{\beta_e < \chi_e \leq 1} \ell_e(\chi_e, \mu), \quad (1.125)$$

причём  $W$  есть вогнутая функция  $\mu$ , т.к. она является поточечным минимумом суммы линейных по  $\mu$  функций. Из последнего выражения находится значение  $\chi_e$  как функции от  $\mu$ . Учитывая (1.123), это легко сделать в явном виде:

$$\ell'_e(\chi_e) = \frac{b_e^{(k)}}{(\chi_e - \beta_e)^2} \frac{\partial C_{(k)}}{\partial \chi_e} + \mu m_e = 0, \quad (1.126)$$

$$\ell''_e(\chi_e) = \frac{2b_e^{(k)}}{(\chi_e - \beta_e)^3} \left( -\frac{\partial C_{(k)}}{\partial \chi_e} \right) > 0, \quad (1.127)$$

где решением является стационарная точка

$$\chi_e^*(\mu) = \beta_e + \sqrt{\frac{b_e^{(k)}}{\mu m_e} \left( -\frac{\partial C_{(k)}}{\partial \chi_e} \right)}, \quad (1.128)$$

которая в силу положительности второй производной  $\ell''_e$  является точкой локального минимума.

А поскольку функция  $\ell_e$  является выпуклой относительно  $\chi_e$ , найденная точка  $\chi_e^*$  является точной глобального минимума. Теперь можно выписать явное выражение для функции  $W_e$  и её градиента:

$$W_e(\mu) = \ell_e(\chi_e^*(\mu), \mu) = 2\sqrt{\mu m_e b_e^{(k)} \left( -\frac{\partial C_{(k)}}{\partial \chi_e} \right)} + \mu m_e \beta_e, \quad (1.129)$$



$$\nabla W_e(\mu) = \sqrt{\frac{m_e b_e^{(k)}}{\mu}} \left( -\frac{\partial C_{(k)}}{\partial \chi_e} \right) + m_e \beta_e. \quad (1.130)$$

Двойственная задача состоит в максимизации функции  $W$  (1.124)

$$W(\mu) = \varphi_{(k)} - \mu M_{max} + \sum_{e=1}^{N_{elem}} W_e(\mu) \rightarrow \max_{\mu \geq 0}, \quad (1.131)$$

которую достаточно быстро можно выполнить любым градиентным методом:

$$\begin{aligned} \nabla W(\mu) &= \sum_{e=1}^{N_{elem}} \nabla W_e(\mu) - M_{max} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sum_{e=1}^{N_{elem}} \sqrt{m_e b_e^{(k)}} \left( -\frac{\partial C_{(k)}}{\partial \chi_e} \right) + \sum_{e=1}^{N_{elem}} m_e \beta_e - M_{max} = 0, \end{aligned} \quad (1.132)$$

откуда

$$\mu = \left( \frac{\sum_{e=1}^{N_{elem}} \sqrt{m_e b_e^{(k)}} \left( -\frac{\partial C_{(k)}}{\partial \chi_e} \right)}{M_{max} - \sum_{e=1}^{N_{elem}} m_e \beta_e} \right)^2 \approx \left( \frac{\sum_{e=1}^{N_{elem}} \sqrt{m_e b_e^{(k)}} \left( -\frac{\partial C_{(k)}}{\partial \chi_e} \right)}{M_{max} - \chi_{min} M_{total}} \right)^2. \quad (1.133)$$

Подставляя полученное значение  $\mu$  в выражение (1.128), находим значения псевдоплотности на всех конечных элементах поочерёдно. Найденный вектор  $\{\chi^*\}$  является точкой аппроксимации на следующем итерационном шаге  $(k+1)$ . Итерационный процесс повторяется до тех пор, пока не будет выполнен критерий остановки (например, изменение целевой функции податливости становится несущественным). В случае отсутствия в задаче (1.121), (1.105) допустимого решения используют подход с фиктивными переменными [120].

Развитием метода подвижных асимптот является *последовательное выпуклое программирование*<sup>1)</sup> (ПВП), разработанное в 1993 году К. Зилобером [121] по аналогии с ПКП, разработанным Шиттковски. В качестве оценочной функции он рассматривает расширенную функцию Лагранжа, которая в конце каждой итерации используется для линейного поиска по правилу Армихо.

При  $p = 1$  задача минимизации податливости становится выпуклой, что гарантирует сходимость к глобальному минимуму [122]. Однако при единичном штрафе область «серого» материала становится весьма протяжённой (см. рис. 1.6б и рис. 1.8б), по объёму даже превосходящей область сплошного материала [101]. Использование же штрафного параметра  $p > 1$  в задаче минимизации податливости (1.82) делает невыгодным появление конечных элементов с промежуточными псевдоплотностями, что по сути является своеобразным фильтром

<sup>1)</sup> Sequential convex programming (SCP).

«серой» области материала [102]. В [101] показано, что условия Хашина – Штрикмана<sup>1)</sup> [123] для «серого» материала накладывают ограничения на параметр штрафа:

$$p \geq \max \left\{ \frac{2}{1-\nu_0}; \frac{4}{1+\nu_0} \right\} \text{ в двумерных задачах,}$$

$$p \geq \max \left\{ 15 \frac{1-\nu_0}{7-5\nu_0}; \frac{3}{2} \frac{1-\nu_0}{1-2\nu_0} \right\} \text{ в трёхмерных задачах,}$$
(1.134)

где  $\nu_0$  – коэффициент Пуассона сплошного материала. Из условия (1.134) для стали при  $\nu_0 = 0,3$  получается ограничение  $p \geq 3,08$  в двумерном случае и  $p \geq 2,63$  в трёхмерном случае, а для алюминия при  $\nu_0 = 1/3$  –  $p \geq 3$  в обоих случаях. Недостатками метода SIMP являются отсутствие выпуклости целевой функции и вероятное наличие большого числа локальных минимумов при  $p > 1$ , а также зависимость от КЭ сетки и штрафного параметра [124], причём слишком большое значение  $p$  приводит к быстрой сходимости к локальным минимумам [116]. Чтобы избежать сходимости к локальным минимумам, И. Петерсон и О. Зигмунд [104] предложили использовать *подход увеличения параметра*, в котором задача ТО решается методом SIMP с последовательным увеличением штрафного параметра, начиная с  $p = 1$  и продолжая вплоть до  $p = 5$ , причём полученное на предыдущем шаге оптимальное решение является начальным приближением на следующем шаге (такой подход позволяет выявить более тонкую структуру оптимального решения, см. рис. 1.6 и рис. 1.8). Ещё одними недостатками метода SIMP является проблема шахматной доски, а также необходимость постобработки полученной геометрии. К сильным сторонам метода SIMP относят простоту реализации, низкую вычислительную сложность и высокую скорость сходимости. Данный метод встроен в ПК ANSYS Workbench.

О. Зигмунд [125] предложил модифицированный метод SIMP, в котором минимальный модуль упругости  $E_{min}$  «пустого» конечного элемента задаётся явно и не зависит от штрафного параметра  $p$ :

$$E_e(\chi_e) = E_{min} + \chi_e^p (E_0 - E_{min}) = E_{min} + \chi_e^p \Delta E. \quad (1.135)$$

Хотя в этом случае псевдоплотность  $\chi_e$  может принимать нулевое значение, данный метод не имеет принципиальных отличий от исходного метода SIMP (основные отличия заключаются в возможности решения задач с двумя фазами материала и удобстве применения различных фильтров [125]).

Ещё одним подходом с непрерывной псевдоплотностью материала является метод Rational Approximation of Material Properties<sup>2)</sup> (RAMP), разработанный М. Столпом и К. Сванбергом [126]. В этом методе модуль Юнга конечного элемента  $E_e$  связывается с его псевдоплотностью  $\chi_e$

<sup>1)</sup> Условия Хашина-Штрикмана, накладываются ограничения на модуль сдвига и объёмный модуль упругости для смеси нескольких различных однородных изотропных материалов, показывают, при каких значениях штрафного параметра механические свойства «серого» материала становятся физическими, т.е. его можно рассматривать как смесь сплошного материала и пустоты (вспененный материал).

<sup>2)</sup> Дробная аппроксимация свойств материала (ДАСМ).

посредством рациональной функции

$$E_e(\chi_e) = E_{min} + \frac{\chi_e}{1+q(1-\chi_e)} \Delta E, \quad (1.136)$$

где  $q$  – параметр штрафа. Как и в методе SIMP, значение  $q > 0$  сужает «серую» область материала [102]. Основное отличие метода RAMP от метода SIMP заключается в том, что податливость является выпуклой функцией при  $q = 0$  и становится вогнутой функцией при  $q \geq \bar{q} = \Delta E/E_{min}$ , что гарантирует существование глобального минимума [126] и позволяет эффективно использовать подход продолжения параметра. При этом в методе SIMP податливость не становится вогнутой функцией  $\chi$  вне зависимости от того, насколько большим выбран параметр  $p$  [127]. Прямое сопоставление методов показало, что SIMP с ростом  $p$  порождает волокнистые отростки материала, затрагивающие всё большую часть области проектирования, в то время как RAMP выдаёт практически чёрно-белые результаты с отростками, слабо растущими при увеличении  $q$  [128]. Сохраняя все сильные стороны метода SIMP, метод RAMP обладает схожими недостатками в виде зависимости от КЭ сетки и штрафного параметра.

#### 1.2.2.2.3 Методы эволюции границы

В 1988 г. С. Ошер и Дж. Сетьян [129] предложили метод Level Set<sup>1)</sup> (LS), в качестве неявного представления границы раздела в эйлеровой системе координат, который нашёл своё применения для решения задач ТО лишь в начале 2000-х гг. в работах Дж. Сетьяна [130, 131], С. Ошера [132, 133] и М.Ю. Ванга с соавт. [134]. Основная идея состоит в том, что ТО представляется эволюцией в псевдовремени  $t$  границы конструкции, являющейся поверхностью нулевого уровня некоторой непрерывной функции  $\phi$  (1.99), подчиняющейся уравнению Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \phi \cdot \vec{V} = 0, \quad (1.137)$$

где  $\vec{V}$  – скорость движения границы (как видно, играет роль лишь нормальная компонента скорости в направлении градиента). Решение уравнения (1.137) описывает границу оптимальной конструкции, при этом псевдоплотность записывается аналогично (1.100) через функцию Хевисайда  $H$ :

$$\chi_e = H(\phi_e). \quad (1.138)$$

Недостатками метода LS являются зависимость результата от начальной топологии конструкции [135] (например, от числа дыр в начальной топологии), высокая вычислительная сложность и низкая скорость сходимости по сравнению с методами первой группы, а также отсутствие в (1.137) механизма зарождения новых дыр в процессе эволюции границы, хотя слияние существующих дыр возможно [115]. Проблема зарождения новых дыр была решена

---

<sup>1)</sup> Установка уровня или набор уровней.

рядом авторов [136, 137, 138] путём привлечения топологической производной, разработанной Я. Соколовским и А. Зоховским [139], которая отражает изменение целевой функции при появлении бесконечно малой дыры и позволяет новым дырам зарождаться в любом месте области проектирования  $\Omega$ . Основными преимуществами метода LS являются чёткая граница получаемой конструкции и слабая зависимость от КЭ сетки. Этот метод встроен в ПК ANSYS Workbench.

На рис. 1.9 и рис. 1.10 показаны результаты ТО трёхмерных вариантов консольной балки и свободно опертой балки соответственно, полученные методами SIMP и LS. Как видно, оба метода получили близкие решения, похожие на двутавровый профиль в случае консольной балки и ферменную конструкцию в случае свободно опертой балки.

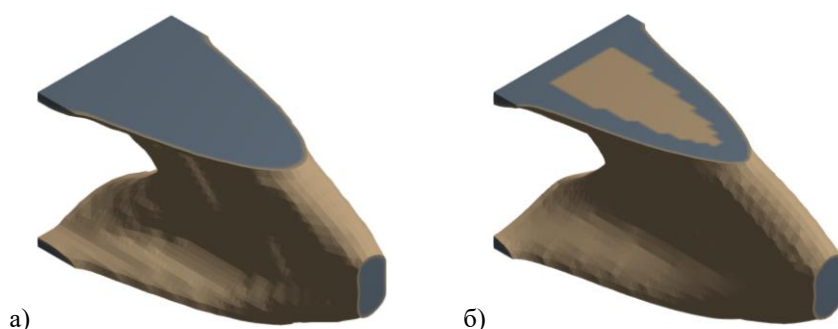


Рис. 1.9 – ТО трёхмерной консольной балки (вертикальная сила приложена к центру торцевой грани, остаточная масса 25 %): а) SIMP ПВП ( $p = 3,0$ ); б) LS

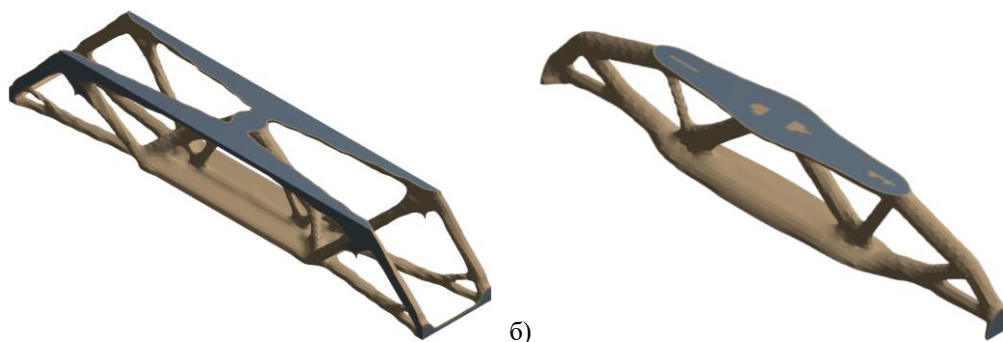


Рис. 1.10 – ТО трёхмерной свободно опертой балки (вертикальная сила приложена к центру верхней грани, остаточная масса 10 %): а) SIMP ПВП ( $p = 3,0$ ); б) LS

Ещё одним методом эволюции границы является метод Phase Field<sup>1)</sup> (PF), который к задачам ТО впервые был применён Б. Бурденю и А. Шамболем [140, 141], а также М.Ю. Вангом и Ш. Жу [142]. В данном методе сплошной материал и пустота рассматриваются как две фазы одного материала, между которыми существует диффузионная граница раздела ненулевой толщины. Для описания фазового распределения материала на всей области проектирования  $\Omega$  задаётся фазовая функция  $\varphi$ , которая в пустой фазе принимает значение 0, в сплошной фазе – значение 1, а в диффузионной границе раздела фаз – промежуточные значения  $0 < \varphi < 1$ .

<sup>1)</sup> Фазовое поле.

Свободная энергия полученной системы записывается в форме функционала Гинзбурга-Ландау

$$F_\varepsilon(\varphi) = \int_{\Omega} \left[ \frac{\varepsilon}{2} |\nabla\varphi|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(\varphi) \right] d\Omega, \quad (1.139)$$

где  $\varepsilon$  – коэффициент толщины диффузионной границы;  $W$  – двухъямный потенциал ( $W(0) = W(1) = 0$ ). Данная свободная энергия  $F_\varepsilon$  с некоторым весовым коэффициентом добавляется к потенциальной энергии деформации  $U$ , после чего ставится задача минимизации полученной суммы. Как видно, оба подынтегральных слагаемых в (1.139) обращаются в ноль в сплошной и пустой фазах материала и являются ненулевыми только в пределах диффузионной границы раздела фаз, причём первое слагаемое штрафует появление излишних границ раздела, а второе слагаемое заставляет  $\varphi$  принимать одно из двух значений 0 или 1. Эволюция границы описывается уравнением четвёртого порядка Кана-Хилларда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \nabla \cdot \left( M \nabla \frac{\delta F_\varepsilon(\varphi)}{\delta\varphi} \right), \quad (1.140)$$

где  $M$  – диффузионный коэффициент. Достоинствами метода PF являются слабая зависимость от КЭ сетки и возможность явного контроля толщины «серой» области материала, что придаёт получаемому решению чёткие границы. В методе PF, в отличие от метода LS, имеется возможность зарождения новых дыр, т.е. отсутствует зависимость результата от начальной топологии конструкции. Недостатками этого метода является высокая вычислительная сложность и низкая скорость сходимости по сравнению с методами первой группы.

## 1.2.3 Оптимизация формы

### 1.2.3.1 Задача оптимизации формы

#### 1.2.3.1.1 Формулировка

Оптимизация формы (ОФ) состоит в том, чтобы путём изменения части или всей границы  $\partial\Omega$  конструкции добиться получения её наилучших характеристик при заданных ограничениях. В отличие от ПО, где традиционно минимизируют массу конструкции, и ТО, в которой классической целевой функцией стала потенциальная энергия деформации, здесь нет подобной канонической целевой функции. Однако в настоящей работе основной целевой функцией в задаче ОФ будет минимизация максимального эквивалентного по Мизесу напряжения (2.40):

$$\sigma_{max}^{eq}(\{s\}) = \max_{e=1, \dots, N_{elem}} \sigma_e^{eq}(\{s\}) \rightarrow \min_{\{s_{down}\} \leq \{s\} \leq \{s_{up}\}} \quad (1.141)$$

возможно при ограничении на массу конструкции

$$\int_{\Omega(\{s\})} \rho d\Omega \leq M_{max} \quad (1.142)$$

и других ограничениях на сочетания параметров

$$\{g\}(\{s\}) \leq 0, \quad (1.143)$$

$$\{h\}(\{s\}) = 0, \quad (1.144)$$

где вектор  $\{s\}$  переменных проектирования описывает границу  $\partial\Omega$  конструкции. В ходе решения задачи ОФ граница конструкции меняется, что при использовании МКЭ требует перестроения КЭ сетки. Хотя в общем случае эволюция границы может приводить к вырожденной геометрии, изначально изменение топологии конструкции (числа дыр и, соответственно, степени связности) не предполагается.

Несмотря на то, что прочностная задача при ОФ решается в линейной постановке, здесь, как и в задаче ТО, минимизация напряжений при одновременном действии двух или более линейно независимых векторов нагрузок не является эквивалентной многоцелевой минимизации взвешенной суммы напряжений при раздельном действии этих нагрузок. Это связано с тем, что в общем случае даже для линейных функций максимум суммы не равен сумме максимумов. Поэтому для выполнения ОФ предлагается использовать алгоритм, аналогичный алгоритму выполнения многоцелевой ТО (см. рис. 1.5), с той лишь разницей, что потенциальные энергии деформации  $S_j$  заменяются на максимальные эквивалентные напряжения  $(\sigma_{max}^{eq})_j$ , а целевая функция приобретает вид

$$\sigma_{\Sigma} = \{p\}^T \{\sigma_{max}^{eq}\} \rightarrow \min. \quad (1.145)$$

#### 1.2.3.1.2 Классические примеры

Первым простейшим примером задачи ОФ является оптимизация формы выреза в квадратной пластине, подверженной двусосному растяжению единичным напряжением. Изначально вырез полагается прямоугольным. Постановка задачи и результаты показаны на рис. 1.12. Как видно, в обоих случаях оптимальная форма выреза является кругом.

Вторым простейшим примером задачи ОФ является оптимизация формы консольной балки переменного сечения, нагруженной единичной силой на свободном конце. Постановка задачи и результат показаны на рис. 1.11. Как видно, вместо скругления образовался конусный переход.

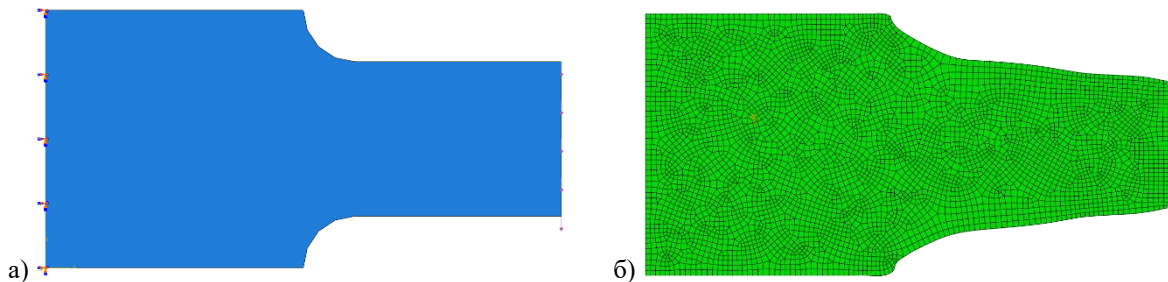


Рис. 1.11 – ОФ скругления балки переменного сечения: а) постановки задачи; б) результат

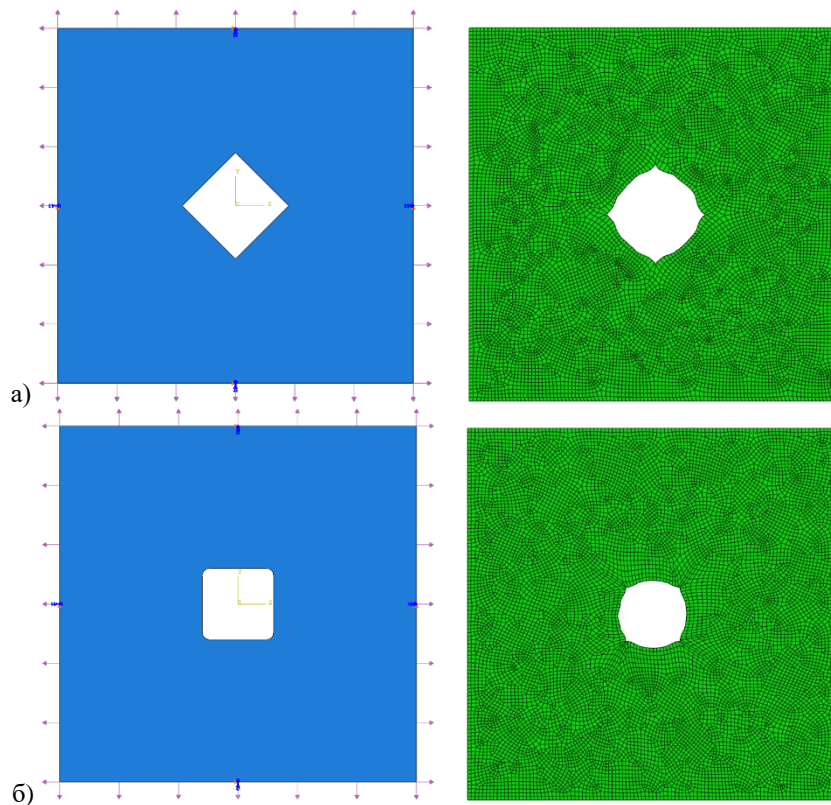


Рис. 1.12 – ОФ выреза в квадратной пластине, подверженной двuosному растяжению: а) первый вариант начального выреза и результат его ОФ; в) второй вариант начального выреза и результат его ОФ

### 1.2.3.2 Классификация методов оптимизации формы

Существующие методы ОФ основаны на том или ином способе эволюции границы  $\partial\Omega$  конструкции, и их можно разделить на две группы:

- 1) методы, использующие явное описание границы  $\partial\Omega$ ;
- 2) методы неявной эволюции границы  $\partial\Omega$ .

В методах первой группы для описания границы конструкции чаще всего используются три следующих способа [143]:

- через КЭ узлы, лежащие на границе;
- с помощью кусочно-полиномиальной интерполяции;
- с помощью сплайн-интерполяции (включая NURBS).

В методах второй группы для неявной эволюции границы нашёл применение *подход фиктивных сил*, описание которого приведено в п.1.2.3.2.2.

#### 1.2.3.2.1 Методы явного описания границы конструкции

При использовании МКЭ описание границы конструкции через граничные КЭ узлы является наиболее естественным способом, который первым стал применяться в задачах ОФ. Однако недостатками такого подхода является, во-первых, большое число переменных проектирования и, во-вторых, отсутствие гладкости и технологичности получающихся форм [143, 144]. Также стоит отметить, что если изменять положение только граничных узлов, а

внутренние узлы оставлять без изменений, то это приведёт к очень сильному искажению конечных элементов, лежащих на границе, вплоть до их вырождения. Поэтому вместе с перемещением граничных узлов требуется перестройка (выравнивание) части внутренних узлов. Подобное перестроение КЭ сетки в некоторых случаях может занять больше времени, чем сам КЭ расчёт. Данный метод используется в ПК SIMULIA Tosca Structure и в ПК ANSYS Workbench.

В 1975 г. А. Франкавилла, К. Рамакришнан и О. Зинкевич [145] предложили использовать многочлены для описания границы конструкций на примере плоских задачах ОФ. В 1982 г. М. Имам [146], используя интерполяционные многочлены для описания границы, предложил применение суперпозиции форм:

$$\{x\} = \sum_{i=1}^{\text{card}\{s\}} s_i \{x_i\}, \quad (1.146)$$

где  $\{x_i\}$  – вектор координат  $i$ -го контрольного КЭ узла;  $\{x\}$  – глобальный вектор координат, описывающий форму поверхности. Достоинством кусочно-полиномиальной интерполяции является небольшое число переменных проектирования, а к недостаткам относится появление сильных колебаний формы границы при использовании интерполяционных многочленов высокого порядка [143].

Избежать осцилляций граничной поверхности помогают сплайны, которые являются многочленами низкой степени (обычно от 2-й до 4-й). В настоящее время при проектировании конструкций самым распространённым видом сплайнов стал NURBS (non-uniform rational basis spline, неравномерный рациональный базисный сплайн). Если кривые Безье имеют глобальное регулирование, т.е. степень многочлена определяется количеством контрольных точек и изменение хотя бы одной из них приводит к изменению всей кривой в целом, то NURBS обладает локальным регулированием, при котором изменение одной контрольной точки приводит лишь к локальному изменению кривой NURBS вблизи этой точки. Достоинствами подхода с использованием кривых NURBS являются низкое число переменных проектирования, гладкость получаемых решений и отсутствие резких осцилляций на поверхности. Использование сплайн-интерполяции, очевидно, требует автоматического перестроения КЭ сетки на каждой итерации.

#### 1.2.3.2.2 Методы неявной эволюции границы конструкции

В 1988 г. А. Белегунду и С. Раджан [147] предложили использование подхода фиктивных сил для решения задач ОФ. В этом подходе фиктивные силы, приложенные к контрольным КЭ узлам, являются переменными проектирования, действие которых, как удары молотка, формируют поверхность конструкции. Единичная фиктивная сила с номером  $i$ , приложенная в контрольном КЭ узле, порождает вектор перемещений  $\{u^i\}$ , являющийся решением уравнения

$$[K_a]\{u^i\} = \{1^i\}, \quad (1.147)$$



где полная матрица жёсткости  $[K_a]$  определяется приложением граничных условий, допускающих не все, а только возможные изменения формы, поэтому она отлична от полной матрицы жёсткости  $[K]$  исходной задачи. Полученные значения перемещений  $\{u^i\}_{a\Omega}$  с весовыми коэффициентами  $s_i$ , являющимися переменными проектирования, по смыслу соответствующими величине фиктивных сил, прибавляются к координатам КЭ узлов, лежащих на границе конструкции. Достоинством такого подхода является плавное изменение КЭ сетки с почти полным отсутствием сильно искажённых элементов, а недостатком – зависимость получаемых результатов от выбора контрольных КЭ узлов, к которым прикладываются фиктивные силы.

### 1.3 Разработка метода проектирования судовых конструкций на основе комплексного подхода к оптимизации

#### 1.3.1 Алгоритм рационального проектирования судовых конструкций

Положительный практический опыт проектирования принципиально новых конструкций говорит о том, что конструирование представляет собой многостадийный процесс. Он начинается с поиска конструктивно-силовой схемы, отвечающей функциональному и техническому назначению изделия. Как только эта схема выбрана, возникает вопрос определения толщин и размеров связей, удовлетворяющих критериям прочности, жёсткости и устойчивости. На последней стадии процесса формируется конструктивно-технологический облик узлов, позволяющий обеспечить заданный ресурс конструкции вкуче с разумным уровнем стоимости её изготовления. Таким образом, на различных стадиях проектирования принимаются важные технические решения по конструкции с учётом технологических соображений и обусловленных ими финансовых аспектов.

На каждой стадии проектирования с использованием современных программных продуктов предлагается использовать свои методы оптимизации. На стадии выбора конструктивно-силовой схемы целесообразно применять приёмы ТО, на стадии выбора толщин и размеров силовых элементов – приёмы ПО, а на стадии конструктивно-технологического оформления узлов – приёмы ОФ. Реализация такого многостадийного процесса ведёт к созданию практического и эффективного алгоритма рационального проектирования судовых конструкций. Укрупнённая блок-схема предлагаемого алгоритма, показанная на рис. 1.13, состоит из нескольких этапов, каждый из которых соответствует определённой стадии проектирования.

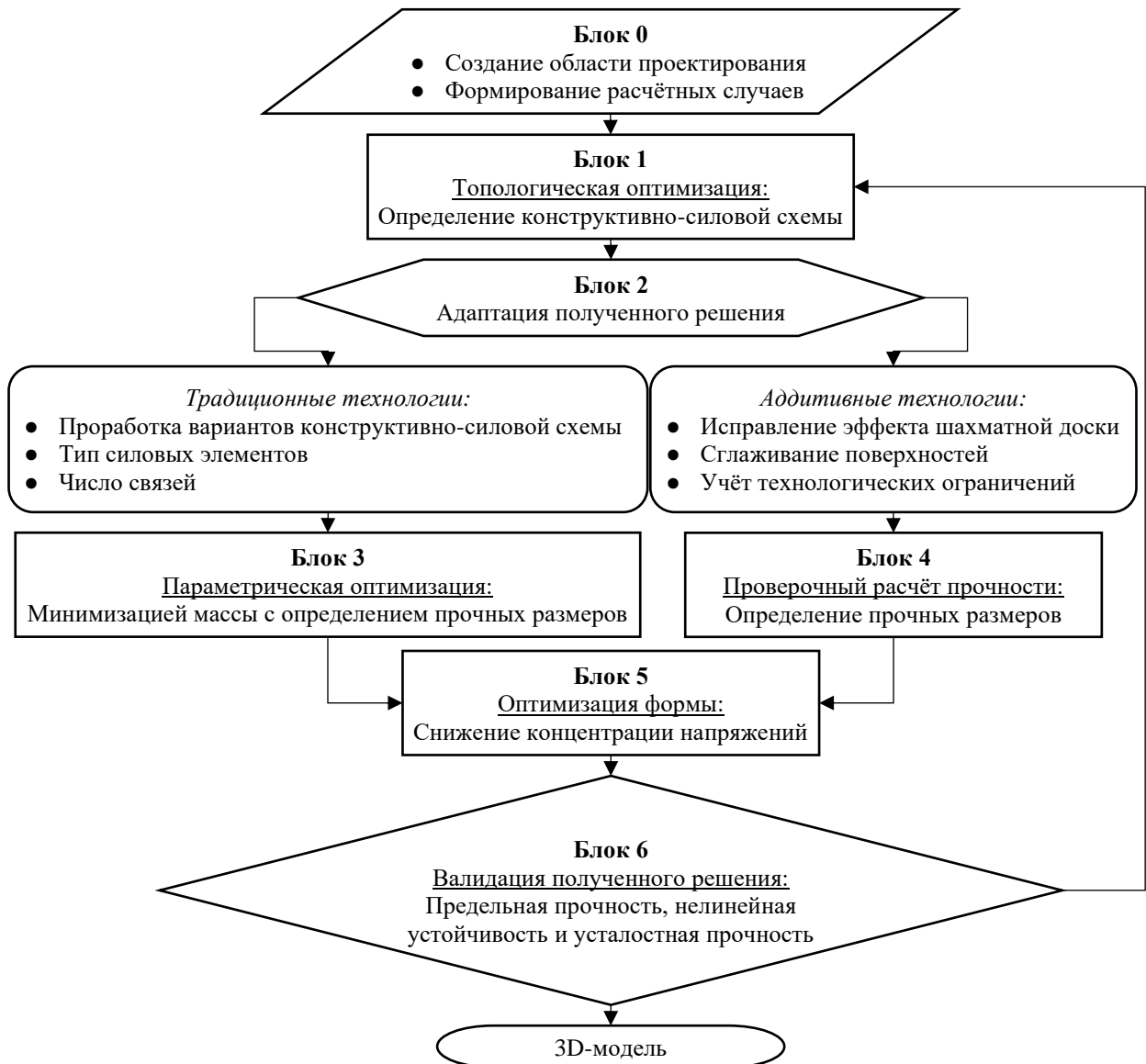


Рис. 1.13 – Схема предлагаемого алгоритма рационального проектирования судовых конструкций

## 1.3.2 Основные этапы алгоритма

### 1.3.2.1 Начальный этап

На начальном этапе (блок 0) создаётся область проектирования, в которую должна быть вписана разрабатываемая конструкция. Если заранее известны и фиксированы части конструкции, на которые действуют внешние силы, а также части конструкции, которые должны быть закреплены, то задание нагрузок и граничных условий является вполне очевидным. Но зачастую это не так, и конкретная поверхность, линия или точка приложения нагрузки не фиксирована, хотя эта нагрузка сохраняет главный вектор и главный момент. В таком случае необходимо рассматривать набор различных вариантов конкретного приложения внешних сил.

### 1.3.2.2 Определение конструктивно-силовой схемы

На следующем этапе (блок 1) выполняется решение задачи ТО в постановке (1.77)–(1.81) (хотя она может быть сформулирована и в двойственной постановке минимизации массы

конструкции с сопутствующим ограничением её потенциальной энергии деформации), где для многоцелевой ТО используется описанный ранее алгоритм (см. рис. 1.5). При этом рекомендуется учитывать технологические ограничения, как то:

- наличие симметрий (в том числе осевой);
- минимальный и максимальный размеры конструктивного элемента;
- направление извлечения при использовании литейных технологий;
- направление экструзии при её применении;
- угол нависания и направление роста для аддитивных технологий.

В ходе ТО происходит поиск оптимальной структуры и эффективного распределения материала, что позволяет выявить рациональную конструктивно-силовую схему. Для решения задачи ТО рекомендуется использовать несколько методов, например, SIMP и LS – они дают, как правило, близкие, но не идентичные решения. Полученные двумя методами решения необходимо сопоставить путём проведения проверочных расчётов прочности. При использовании метода SIMP рекомендуется применять подход увеличения штрафного параметра, начиная с единичного и заканчивая его значением не менее 3,0. Также целесообразно решение последовательности задач ТО с постепенным убыванием остаточной массы материала (подход уменьшения остаточной массы). Например, если требуется оставить не более 50 % исходной массы, то рекомендуется пошагово уменьшать остаточную массу на 10 % от исходной, где областью проектирования на текущем шаге является решение, полученное на предыдущем шаге. Результаты такого подхода показаны на рис. 1.6.

### 1.3.2.3 Адаптация полученного решения

Конструкции, получаемые в результате ТО, зачастую имеют весьма причудливые формы, в ряде случаев похожие на биологические структуры, и требуют адаптации под существующие технологии (блок 2). Воспроизведению таких структур в конструкциях судов в наибольшей мере способствуют лишь аддитивные технологии, которые являются довольно дорогостоящими и на данный момент нашли очень ограниченное распространение в судостроении. Но даже с их применением требуется постобработка полученной геометрии в системах автоматизированного проектирования (САПР). Например, при использовании метода SIMP требуется избавиться от «серого» материала и чётко определить контур конструкции, зачастую необходимо сгладить её поверхности, а также исправить эффект шахматной доски при его наличии. В целом, аддитивные технологии тоже имеют свои ограничения, что требует упрощения геометрии найденного решения, хотя подобные упрощения могут быть выполнены формальными средствами проектирования.

В случае применения традиционных для судостроения технологий ситуация существенно

сложнее. Здесь требуется на основе полученной в результате решения задачи ТО комплексной структуры сформировать относительно простую конструктивно-силовую схему, определяемую типом силовых элементов, их числом, расположением в пространстве и способами соединения между собой. Процесс перевода полученного численного решения с «компьютерного» языка на язык технолога является в значительной степени творческим, сопровождаемым использованием эвристических приёмов, опыта и инженерной интуиции проектанта. Задача последнего состоит в том, чтобы по полученному графическому изображению распределения материала внутри области проектирования определить соответствующие этому распределению типы связей (пластины, стержни, панели...) и способы их соединения между собой (узлы). Например, структуры, показанные на рис. 1.10, явно соответствуют ферменным конструкциям, и задача проектанта состоит в выборе профилей стержней и оформлении узлов их пересечений. При этом широкое использование лазерной резки материала и лазерной сварки конструкций способствуют созданию более рациональных технических решений.

#### 1.3.2.4 Назначение прочных размеров

Сформированная после адаптации конструкция нуждается в проведении проверочных расчётов прочности и устойчивости, вне зависимости от того была ли она адаптирована под традиционные (блок 3) или аддитивные (блок 4) технологии. При этом в расчётах прочности выполняется оценка номинальных напряжений в конструкции, а величина напряжений в концентраторах игнорируется.

Данный этап подразумевает проведение ПО в постановке (1.40)–(1.43). Существенное отличие между традиционной и аддитивной конструкциями заключается в том, что первая параметризуется гораздо проще второй. Поэтому в случае аддитивной конструкции ПО не всегда возможна, а вместо неё выполняется итерационный процесс проведения проверочных прочностных расчётов с одновременным подбором размеров конструктивных элементов, выполняемым проектантом, а в некоторых случаях необходимо повторно провести ТО с ослаблением ограничения на массу материала.

#### 1.3.2.5 Снижение концентрации напряжений

Следующим шагом является снижение концентрации напряжений в конструкции путём выполнения ОФ (блок 5), которая позволяет выполнить плавный переход от одной связи к другой (сгладить концентратор), что снижает градиент напряжений, а это, в свою очередь, способствует увеличению ресурса конструкции. Задача ОФ формулируется в виде (1.141)–(1.144), при этом многоцелевая ОФ выполняется согласно описанному ранее алгоритму с учётом (1.145). Поскольку для традиционной конструкции выполнение ОФ характерно для узлов пересечений связей, здесь рекомендуется использовать *метод подмоделирования* (см. п.2.1.5). В случае же

аддитивной конструкции отделить связь от узла не всегда возможно, поэтому рекомендуется выполнять ОФ для всей конструкции целиком или для её больших частей в отдельности, что может помочь проектанту с назначением прочных размеров.

#### 1.3.2.6 Валидация полученного оптимального проектного решения

Поскольку при выполнении оптимизации прочностные задачи решаются в линейной постановке и используются упрощённые критерии прочности на основе допускаемых напряжений, допускаемых перемещений и коэффициентов запаса линейной устойчивости, на завершающем этапе проектирования (блок 6) требуется валидация полученного оптимального проектного решения, включающая проверку предельной прочности (см. п.2.1) и нелинейной устойчивости (см. п.2.2), а также оценку ресурса конструкции (см. п.2.3). Т.к. процесс нагружения судовых конструкций зачастую имеет сложный характер, для повышения точности расчётов требуется учитывать трёхосность напряжённо-деформированного состояния (НДС).

## 2 РАЗРАБОТКА ЭФФЕКТИВНЫХ СПОСОБОВ ВАЛИДАЦИИ ПОЛУЧЕННЫХ ПРОЕКТНЫХ РЕШЕНИЙ

### 2.1 Проверка предельной прочности конструкций

Проверка предельной прочности конструкции состоит в проверке критериев разрушения при действии предельных нагрузок. Для этого необходимо решить задачу нелинейной теории упругости (п.2.1.1) с учётом пластического течения материала. Начало появления пластических деформаций в конструкции описывается теориями прочности (п.2.1.2), а ход их накопления – моделями пластического упрочнения (п.2.1.3). Критерии разрушения связаны как с уровнями напряжений, так и с уровнями накопленных пластических деформаций, возникающих в конструкции (п.2.1.4). Ниже рассматривается каждый из этих вопросов в отдельности, и в конце приводится алгоритм проверки предельной прочности с рекомендациями по выбору моделей пластического упрочнения и их параметров, а также критериев разрушения (п.2.1.5).

#### 2.1.1 Задача теории упругости

##### 2.1.1.1 Формулировка

Рассмотрим упругое тело  $\Omega$ , имеющее кинематические ограничения  $\vec{u}_0$  на границе  $\Gamma_u \subset \partial\Omega$ , нагруженное объёмными силами  $\vec{a}$ , а также поверхностными силами  $\vec{P}$  на границе  $\Gamma_p \subset \partial\Omega$  (см. рис. 2.1).

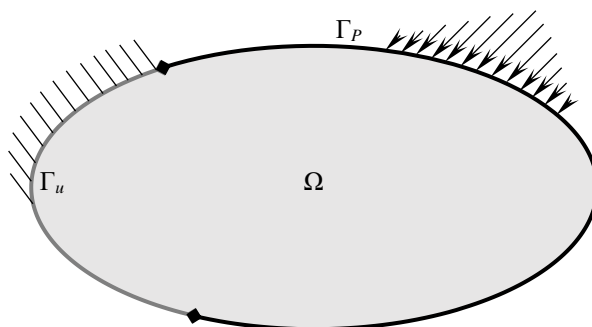


Рис. 2.1 – Формулировка задачи теории упругости:  $\Omega$  – упругое тело;  $\Gamma_p$  – поверхность приложения нагрузки;  $\Gamma_u$  – поверхность кинематических ограничений

Система уравнений задачи теории упругости состоит из трёх групп формул [148, 149, 150]:

1) уравнения связи деформаций и перемещений

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} [(\nabla \vec{u})^T + \nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T \cdot \nabla \vec{u}] \text{ с граничными условиями } \vec{u}|_{\Gamma_u} = \vec{u}_0, \quad (2.1)$$

2) уравнения статического равновесия

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \vec{a} &= \rho \frac{D^2 \vec{u}}{Dt^2} \text{ внутри } \Omega \text{ и} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} &= \vec{P} \text{ на границе } \Gamma_p \subset \partial\Omega, \end{aligned} \quad (2.2)$$

3) уравнения связи напряжений и деформаций

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.3)$$

- где  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – тензор деформаций Грина;  
 $\vec{u}$  – вектор перемещений;  
 $\boldsymbol{\sigma}$  – тензор истинных напряжений Коши;  
 $\vec{a}$  – вектор объёмных сил;  
 $\rho$  – плотность материала;  
 $\vec{n}$  – нормаль к поверхности  $\Gamma_P$ ;  
 $\vec{P}$  – вектор поверхностных сил (может быть нулевым);  
 $\mathbf{D}$  – тензор упругости четвёртого порядка.

### 2.1.1.2 Метод решения

Самым распространённым методом решения задачи (2.1)–(2.3) является метод конечных элементов. Он состоит в разбиении исходного тела на конечные элементы (вообще говоря, достаточно малого размера), для которых функция формы аппроксимируется многочленом (обыкновенно от первой до третьей степени), а решение уравнений (2.1)–(2.3) выписывается в явном виде.

Для вывода уравнения равновесия отдельного КЭ используется принцип виртуальных перемещений, согласно которому виртуальное (очень малое) изменение внутренней энергии деформации  $\delta U$  должно быть скомпенсировано равным изменением работы внешних сил  $\delta W$  [151]:

$$\delta U = \delta W. \quad (2.4)$$

Изменение внутренней энергии деформации состоит из двух слагаемых [151]:

$$\delta U = \iiint_{Vol} \{\delta \boldsymbol{\varepsilon}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}\} dV + \iint_{Area_R} \{\delta w_n\}^T \{\boldsymbol{\sigma}\} dA_R, \quad (2.5)$$

где  $Vol$  – объём КЭ;

$Area_R$  – поверхность КЭ с распределённым сопротивлением;

$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$  – вектор полных упругих деформаций,  $\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \varepsilon_{xy} \ \varepsilon_{yz} \ \varepsilon_{xz}\}^T$ ;

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \{\boldsymbol{\varepsilon}^{el}\} + \{\boldsymbol{\varepsilon}^{th}\}; \quad (2.6)$$

$\{\boldsymbol{\varepsilon}^{el}\}$  – вектор механических упругих деформаций;

$\{\boldsymbol{\varepsilon}^{th}\}$  – вектор тепловых деформаций:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}^{th}\} = \Delta T \{\boldsymbol{\alpha}\} = (T - T_0) \{\alpha_x \ \alpha_y \ \alpha_z \ 0 \ 0 \ 0\}; \quad (2.7)$$

$\alpha_i$  – коэффициент линейного теплового расширения вдоль оси  $O_i$ ,  $i = x, y, z$ ;

$T$  – текущая температура в рассматриваемой точке КЭ;

$T_0$  – относительная (бездеформационная) температура;

$\{\boldsymbol{\sigma}\}$  – вектор напряжений,  $\{\boldsymbol{\sigma}\} = \{\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \sigma_{xy} \ \sigma_{yz} \ \sigma_{xz}\}^T$ ;

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon^{el}\} = [D]\{\varepsilon\} - [D]\{\varepsilon^{th}\}; \quad (2.8)$$

$[D]$  – матрица упругости (симметричная и положительно определённая):

$$[D] = \begin{bmatrix} 1/E_x & -\nu_{xy}/E_x & -\nu_{xz}/E_x & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{yx}/E_y & 1/E_y & -\nu_{yz}/E_y & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{zx}/E_z & -\nu_{zy}/E_z & 1/E_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{yz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{xz} \end{bmatrix}; \quad (2.9)$$

$E_i$  – модуль Юнга вдоль оси  $Oi$ ,  $i = x, y, z$ ;

$G_{ij}$  – модуль сдвига в плоскости  $Oij$ ,  $i, j = x, y, z$ ;

$\nu_{ij}$  – коэффициент Пуассона,  $i, j = x, y, z$ ;

$\{w_n\}$  – вектор перемещений по нормали к поверхности КЭ в его произвольной точке:

$$\{w_n\} = [N_n]\{u\}; \quad (2.10)$$

$[N_n]$  – матрица функций формы КЭ для нормальных к его поверхности перемещений;

$\{u\}$  – вектор узловых перемещений КЭ.

Вектор деформаций  $\{\varepsilon\}$  связан с вектором узловых перемещений  $\{u\}$  через матрицу связи  $[B]$ , основанную на функциях формы  $N$  элемента [151]:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{u\}. \quad (2.11)$$

Вектор напряжений  $\{\sigma\}$  на поверхности  $Area_R$  с распределённым сопротивлением определяется через коэффициент  $k$  жёсткости основания КЭ [151]:

$$\{\sigma\} = k\{w_n\}. \quad (2.12)$$

Подставляя (2.8) и (2.10)–(2.12) в (2.5), получаем

$$\begin{aligned} \delta U = \{\delta u\}^T \left( \iiint_{Vol} [B]^T [D] [B] dV \right) \{u\} - \{\delta u\}^T \iiint_{Vol} [B]^T [D] \{\varepsilon^{th}\} dV + \\ + \{\delta u\}^T k \left( \iint_{Area_R} [N_n]^T [N_n] dA_R \right) \{u\}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Изменение работы внешних сил состоит из трёх слагаемых [151]:

$$\delta W = - \iiint_{Vol} \{\delta w\}^T \frac{\{F^{ac}\}}{Vol} dV + \iint_{Area_p} \{\delta w_n\}^T \{P\} dA_p + \{\delta u\}^T \{F_e^{nd}\}, \quad (2.14)$$

где  $\{w\}$  – вектор перемещений КЭ в его произвольной точке:

$$\{w\} = [N]\{u\}; \quad (2.15)$$

$[N]$  – матрица функций формы КЭ;

$\{F^{ac}\}$  – вектор приложенных к КЭ ускоряющих сил:



$$\frac{\{F^{ac}\}}{Vol} = \rho \frac{\partial^2 \{w\}}{\partial t^2}; \quad (2.16)$$

$\rho$  – плотность (предполагается постоянной в пределах КЭ);

$t$  – время;

$Area_P$  – поверхность КЭ, на которую приложено давление  $\{P\}$ ;

$\{F_e^{nd}\}$  – вектор узловых сил, приложенных к КЭ.

Подставляя (2.10), (2.15) и (2.16) в (2.14), получаем

$$\delta W = -\{\delta u\}^T \rho \left( \iiint_{Vol} [N]^T [N] dV \right) \frac{\partial^2 \{u\}}{\partial t^2} + \{\delta u\}^T \iint_{Area_P} [N_n]^T \{P\} dA_P + \{\delta u\}^T \{F_e^{nd}\}. \quad (2.17)$$

Окончательная подстановка (2.13) и (2.17) в (2.4) с последующим сокращением на произвольный вектор  $\{\delta u\}$  даёт

$$\begin{aligned} & \left( \underbrace{\iiint_{Vol} [B]^T [D] [B] dV}_{[K_e]} + k \underbrace{\iint_{Area_R} [N_n]^T [N_n] dA_R}_{[K_e^R]} \right) \{u\} - \underbrace{\iiint_{Vol} [B]^T [D] \{\varepsilon^{th}\} dV}_{\{F_e^{th}\}} = \\ & = -\rho \underbrace{\iiint_{Vol} [N]^T [N] dV}_{[M_e]} \underbrace{\frac{\partial^2 \{u\}}{\partial t^2}}_{\{\ddot{u}\}} + \underbrace{\iint_{Area_P} [N_n]^T \{P\} dA_P}_{\{F_e^{pr}\}} + \{F_e^{nd}\} \Rightarrow \\ & \Rightarrow ([K_e] + [K_e^R])\{u\} = -[M_e]\{\ddot{u}\} + \{F_e^{pr}\} + \{F_e^{nd}\} + \{F_e^{th}\}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где  $e = 1, \dots, N_{elem}$  – номер КЭ;

$[K_e]$  – матрица жёсткости КЭ;

$[K_e^R]$  – матрица жёсткости основания КЭ;

$\{F_e^{th}\}$  – вектор тепловых нагрузок КЭ;

$[M_e]$  – матрица масс КЭ;

$\{\ddot{u}\}$  – вектор узловых ускорений КЭ;

$\{F_e^{pr}\}$  – вектор давлений на КЭ.

Объединяя уравнения равновесия для каждого КЭ (2.18) в общем для всех КЭ базисе, формируем глобальное уравнение равновесия [151]

$$[K]\{u\} = \{F\}, \quad (2.19)$$

где  $[K]$  – полная матрица жёсткости тела:

$$[K] = \sum_{e=1}^{N_{elem}} [K_e]; \quad (2.20)$$

$\{F\}$  – полный вектор всех сил, включая приложенные силы  $\{F^a\}$  и реакции  $\{F^r\}$ :

$$\{F\} = \{F^a\} + \{F^r\}; \quad (2.21)$$

$\{u\}$  – полный вектор узловых перемещений всех КЭ, который состоит из искомым узловых перемещений  $\{u_c\}$  и наложенных граничных условий  $\{u_s\}$ :

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} \{u_c\} \\ \{u_s\} \end{Bmatrix}. \quad (2.22)$$

Выделим в уравнении (2.19) части, относящиеся к искомым и наложенным перемещениям:

$$\begin{bmatrix} [K_{cc}] & [K_{cs}] \\ [K_{cs}]^T & [K_{ss}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_c\} \\ \{u_s\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_c^a\} \\ \{F_s^a\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{F_s^r\} \end{Bmatrix}, \quad (2.23)$$

откуда из верхней части уравнения можно выписать выражение для искомым перемещений

$$\{u_c\} = [K_{cc}]^{-1}(\{F_c^a\} - [K_{cs}]\{u_s\}), \quad (2.24)$$

а вектор реакций можно получить из нижней части уравнения

$$\{F_s^r\} = [K_{cs}]^T\{u_c\} + [K_{ss}]\{u_s\} - \{F_s^a\}. \quad (2.25)$$

С помощью найденного вектора  $\{u\}$  узловых перемещений для каждого отдельного КЭ вычисляется его вектор деформаций  $\{\varepsilon\}$  по формуле (2.11), после чего по формуле (2.8) находится вектор напряжений  $\{\sigma\}$ . Для определения напряжений и деформаций на свободной поверхности КЭ сначала определяют деформации  $\varepsilon'_x$ ,  $\varepsilon'_y$  и  $\varepsilon'_{xy}$ , лежащие в плоскости свободной поверхности [151]:

$$\{\varepsilon'^{el}\} = [B']\{u'\} - \{\varepsilon'^{th}\}, \quad (2.26)$$

где (') обозначает местную систему координат с осью  $O'z'$ , перпендикулярной свободной поверхности. После этого задают напряжения

$$\sigma'_{xz} = -\vec{P} \cdot \vec{n}_{x'}, \sigma'_{yz} = -\vec{P} \cdot \vec{n}_{y'}, \sigma'_z = -\vec{P} \cdot \vec{n}_{z'}, \quad (2.27)$$

а для вычисления оставшихся компонент напряжений и деформаций ( $\varepsilon'_z$ ,  $\varepsilon'_{xz}$ ,  $\varepsilon'_{yz}$  и  $\sigma'_x$ ,  $\sigma'_y$ ,  $\sigma'_{xy}$ ) используют уравнение (2.8) в местной системе координат:

$$\{\sigma'\} = [D']\{\varepsilon'^{el}\}. \quad (2.28)$$

### 2.1.2 Теории прочности

В результате решения задачи теории упругости (2.1)–(2.3) в теле определяются поля напряжений и деформаций, характеризующиеся своими тензорами  $\sigma$  и  $\varepsilon$ . Для того, чтобы судить о прочности тела, необходимо как-то сравнить найденные тензоры с тензорами эталонного тела, испытывающего эталонное нагружение. Обыкновенно таким эталоном является испытание стандартного образца на разрыв (см. рис. 2.2), что соответствует простому напряжённому состоянию с единственным напряжением растяжения. Начало пластического деформирования стального образца характеризуется площадкой текучести (для низкоуглеродистых пластичных сталей) и соответствующим ей пределом текучести  $\sigma_y$ . Для выявления начала пластического деформирования в конструкции при сложном напряжённом состоянии существует несколько

теорий прочности, рассматриваемых ниже.

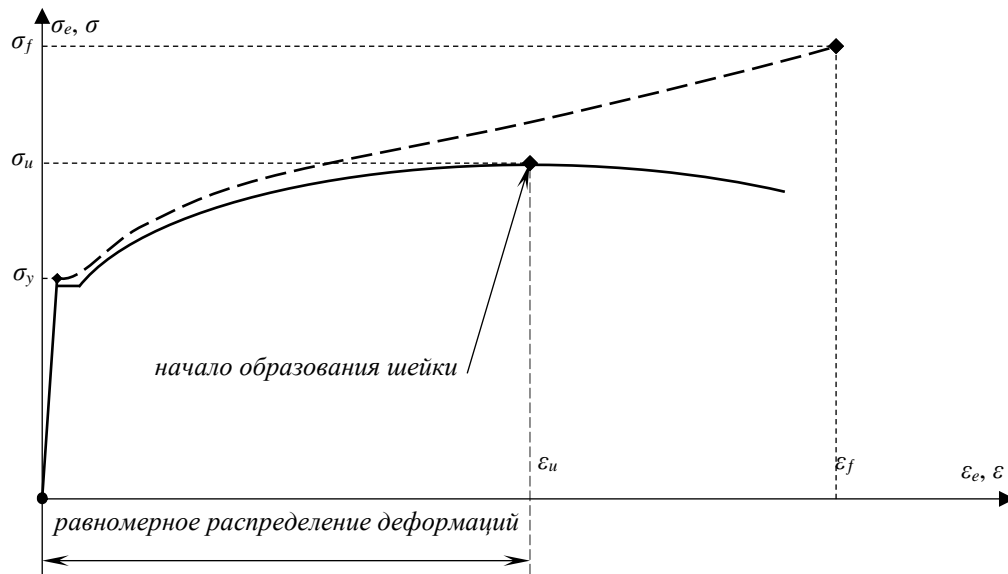


Рис. 2.2 – Диаграмма растяжения стального образца: — инженерные напряжения; - - истинные напряжения;  $\sigma_y$  – предел текучести;  $\sigma_u$  – предел прочности (временное сопротивление отрыву);  $\sigma_f$  – истинный предел прочности (истинное сопротивление отрыву);  $\varepsilon_u$  – временная деформация разрушения;  $\varepsilon_f$  – истинная деформация разрушения

Необходимо отметить, что диаграмму растяжения стандартного образца обычно представляют в инженерных напряжениях  $\sigma_e$  и инженерных деформациях  $\varepsilon_e$ :

$$\sigma_e = \frac{F}{A_0}, \quad (2.29)$$

$$\varepsilon_e = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{L - L_0}{L_0}, \quad (2.30)$$

где  $F$  – сила, растягивающая образец;

$A_0$  – начальная площадь поперечного сечения образца;

$L_0$  – начальная длина рабочей части образца;

$\Delta L$  – удлинение образца.

Формулы (2.29)–(2.30) являются упрощениями для случаев малых деформаций. Действительно, если рассмотреть бесконечно малое приращение длины образца  $d\ell$ , то ему соответствует приращение деформации  $d\varepsilon$ :

$$d\varepsilon = \frac{d\ell}{\ell}, \quad (2.31)$$

где  $\ell$  – текущая длина рабочей части образца. Интегрируя (2.31) в предположении равномерного распределения деформаций в пределах рабочей части образца, находим

$$\varepsilon = \int_{L_0}^L \frac{d\ell}{\ell} = \ln \frac{L}{L_0} = \ln \left( 1 + \frac{\Delta L}{L_0} \right) = \ln(1 + \varepsilon_e). \quad (2.32)$$

Из разложения (2.32) в ряд Тейлора видно, что при малых значениях удлинения образца, как это наблюдается в упругой области, инженерные деформации  $\varepsilon_e^{el}$  очень близки к истинным  $\varepsilon^{el}$ :

$$\varepsilon^{el} \approx \varepsilon_e^{el} \text{ при } \varepsilon_e^{el} < 1\%. \quad (2.33)$$

В упругой области текущая площадь  $A$  поперечного сечения стандартного образца может быть выражена через его коэффициент Пуассона  $\nu$ :

$$A = \pi r^2 = \pi(r_0 - \Delta r)^2 = \pi(r_0 - \nu \varepsilon_e^{el} r_0)^2 = \pi r_0^2 (1 - \nu \varepsilon_e^{el})^2 = A_0 (1 - \nu \varepsilon_e^{el})^2, \quad (2.34)$$

откуда можно найти величину истинных напряжений  $\sigma^{el}$  на упругом участке растяжения

$$\sigma^{el} = \frac{F}{A} = \frac{F}{A_0 (1 - \nu \varepsilon_e^{el})^2} = \frac{\sigma_e^{el}}{(1 - \nu \varepsilon_e^{el})^2} \approx \sigma_e^{el} (1 + 2\nu \varepsilon_e^{el}). \quad (2.35)$$

В пластической области материал можно считать несжимаемым, что на участке до начала образования шейки приводит к равенству

$$AL = A_{max}^{el} L_{max}^{el}, \quad (2.36)$$

откуда с учётом (2.30), (2.34) и малости упругих деформаций

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{F}{A} = \frac{F}{A_{max}^{el} L_{max}^{el}} = \frac{F}{A_0 (1 - \nu \max \varepsilon_e^{el})^2} \frac{L}{L_0 (1 + \max \varepsilon_e^{el})} = \\ &= \frac{\sigma_e (1 + \varepsilon_e)}{(1 - \nu \max \varepsilon_e^{el})^2 (1 + \max \varepsilon_e^{el})} \approx \frac{\sigma_e (1 + \varepsilon_e)}{1 + (1 - 2\nu) \max \varepsilon_e^{el}} \approx \sigma_e (1 + \varepsilon_e) \left(1 - (1 - 2\nu) \frac{\sigma_y}{E}\right). \end{aligned} \quad (2.37)$$

После образования шейки распределение деформаций в рабочей части образца становится неравномерным, поскольку наибольшие деформации появляются в его самой тонкой части. Таким образом, если у стандартного образца при испытании на разрыв отсутствует явно выраженное образование шейки (основным признаком этого является отсутствие на диаграмме участка с падением инженерных напряжений), то на всём протяжении диаграммы растяжения инженерные деформации пересчитываются в истинные по формуле (2.32), а инженерные напряжения в истинные – по формулам (2.35) и (2.37) для упругой и пластической областей соответственно, в противном случае указанные формулы допустимо использовать только до начала образования шейки.

### 2.1.2.1 Теория Галилея – Ренкина

Первой теорией прочности стала гипотеза наибольших нормальных напряжений [152], где в качестве эквивалентного напряжения  $\sigma_{eq}$  выступает абсолютное максимальное нормальное напряжение:

$$\sigma_{eq} = \max\{|\sigma_1|; |\sigma_2|; |\sigma_3|\}, \quad (2.38)$$

где  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  – главные напряжения тензора  $\boldsymbol{\sigma}$ . Однако эта теория не нашла своего подтверждения.

### 2.1.2.2 Теория Треска – Сен-Венана

Следующей и более удачной теорией прочности стала гипотеза максимальных касательных напряжений [152]. Здесь в качестве эквивалентного напряжения  $\sigma_{eq}$  выступает удвоенное максимальное касательное напряжение:

$$\sigma_{eq} = \max\{|\sigma_1 - \sigma_2|; |\sigma_2 - \sigma_3|; |\sigma_3 - \sigma_1|\}. \quad (2.39)$$

### 2.1.2.3 Теория Губера – Мизеса – Генки

Ещё одной теорией прочности, нашедшей широчайшее применение, стала гипотеза потенциальной энергии изменения формы [152]. Губер в качестве критерия выбирает не всю потенциальную энергию деформации, а лишь ту её часть, которая связана с изменением формы, что даёт

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}, \quad (2.40)$$

где  $\mathbf{s}$  – девиаторная часть тензора напряжений:

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_h \mathbf{1}; \quad (2.41)$$

$\mathbf{1}$  – единичный тензор;

$\sigma_h$  – гидростатическое напряжение (первый инвариант тензора напряжений).

### 2.1.2.4 Теория Друкера – Прагера

Две предыдущие теории не учитывают всестороннего растяжения-сжатия. Такой учёт выполнен в теории Друкера – Прагера [150], являющейся обобщением теории Губера – Мизеса – Генки:

$$\sigma_{eq} = (1 - \beta) \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s}} + \beta \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}), \quad (2.42)$$

где  $\beta$  – коэффициент чувствительности к гидростатическому напряжению ( $0 \leq \beta \leq 1/2$ ). Эта теория хорошо подходит для описания пластических деформаций грунтов, бетона, полимеров, льда и других материалов, у которых их появление связано с гидростатическим напряжением.

### 2.1.2.5 Теория Мора – Кулона

Аналогичным обобщением теории Треска – Сен-Венана стала теория Мора – Кулона [150], которая чаще всего используется для грунтов:

$$\sigma_{eq} = R_p = \frac{1 + \sin(\phi)}{1 - \sin(\phi)} \sigma_1 - \sigma_3, \quad (2.43)$$

где  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ;

$R_p$  – предел текучести на сжатие:

$$R_p = \frac{2c \cos(\phi)}{1 - \sin(\phi)}, \quad (2.44)$$

$\phi$  – угол внутреннего трения;

$c$  – сцепление (*когезия*).

### 2.1.2.6 Рекомендации по применению

Для металлических материалов наилучшую сходимость результатов расчётов с

экспериментами демонстрирует теория Губера – Мизеса – Генки [152], поэтому всюду далее в качестве эквивалентных напряжений  $\sigma_{eq}$  выступают эквивалентные по Мизесу напряжения (2.40).

### 2.1.3 Модели пластического упрочнения

Современные модели пластического упрочнения основываются на критерии течения и законе течения соответственно (см. рис. 2.3) [150, 153, 154]:

$$f = \sigma_{eq} - R = 0, \quad (2.45)$$

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (2.46)$$

где  $f$  – функция поверхности текучести (*поверхности нагружения*);

$\sigma_{eq}$  – функция эквивалентного напряжения;

$R$  – функция характерного размера поверхности нагружения;

$\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$  – тензор пластических деформаций;

$\lambda$  – пластический множитель, обычно принимается

$$d\lambda = d\hat{\varepsilon}^{pl}; \quad (2.47)$$

$\hat{\varepsilon}^{pl}$  – эквивалентная накопленная пластическая деформация:

$$d\hat{\varepsilon}^{pl} = \sqrt{\frac{2}{3} d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} : d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}}; \quad (2.48)$$

$Q$  – пластический потенциал;

$\boldsymbol{\sigma}$  – тензор напряжений.

Для металлических материалов обычно полагают

$$Q \equiv f, \quad (2.49)$$

а получающийся из (2.46) закон течения называют *ассоциированным* (рис. 2.3б).

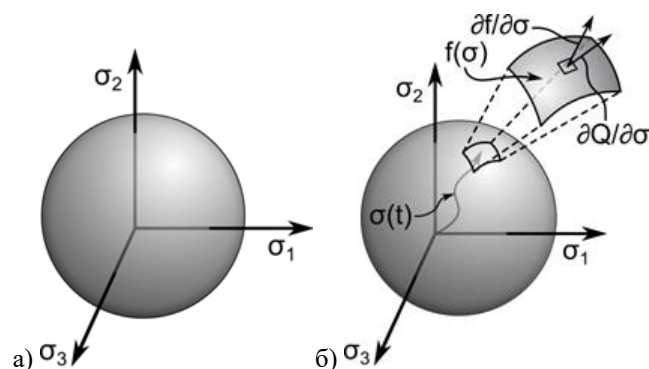


Рис. 2.3 – Пространство главных напряжений [155]: а) пример поверхности нагружения; б) закон течения

Если  $f < 0$ , т.е.  $\sigma_{eq} < R$ , то материал находится в упругом состоянии и пластического течения не происходит. При достижении равенства  $\sigma_{eq} = R$ , т.е. при выполнении критерия (2.45), и одновременном наличии положительной проекции тензора скоростей напряжений  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  на направление градиента поверхности нагружения

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} > 0 \quad (2.50)$$

начинается пластическое течение материала, протекающее согласно закону (2.45)–(2.46), которое в общем случае вызывает изменение формы и размера поверхности нагружения  $f$ . Случай  $f > 0$  недопустим при стационарной пластичности, не зависящей от скорости нагружения.

Поверхности нагружения для теорий Треска – Сен-Венана (2.39), Губера – Мизеса – Генки (2.40) и Друкера – Прагера (2.42) показаны на рис. 2.4. Девиаторная плоскость, имеющая нормаль (1;1;1), в первом случае отсекает на поверхности нагружения правильный шестиугольник, а во втором и третьем случаях – окружности. В 1950 году Р. Хилл показал, что если материал является изотропным и имеет одинаковые пределы текучести на растяжение и сжатие, то пересечение девиаторной плоскости с поверхностью нагружения есть кривая, составленная из 12 одинаковых выпуклых дуг [156]. Эксперименты показывают, что для большинства материалов начальная упругая область (т.е. область  $f < 0$ ) является выпуклой [150], что влечёт за собой выпуклость функции нагружения:

$$f(\theta \sigma_1 + (1 - \theta) \sigma_2) \leq \theta f(\sigma_1) + (1 - \theta) f(\sigma_2), \quad 0 \leq \theta \leq 1. \quad (2.51)$$

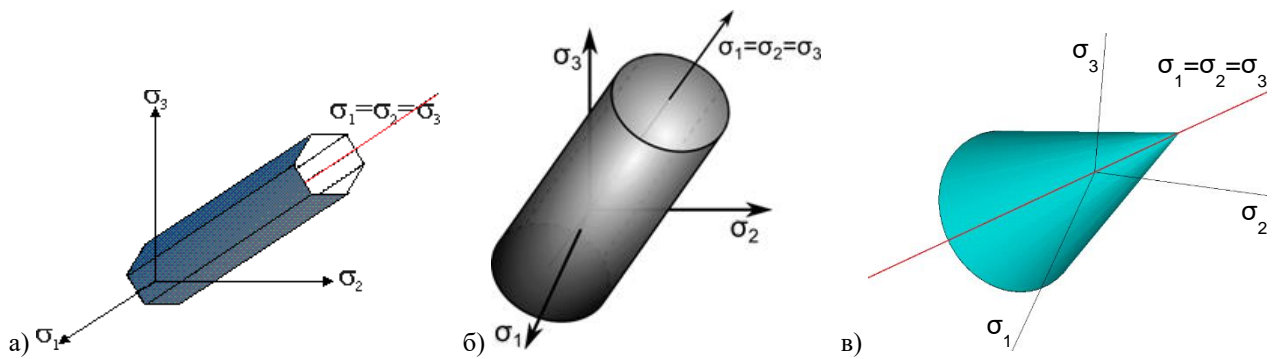


Рис. 2.4 – Поверхности нагружения ( $f = 0$ ) в пространстве главных напряжений: а) Треска – Сен-Венана; б) Губера – Мизеса – Генки [155]; в) Друкера – Прагера

В критерии течения (2.45) как эквивалентное напряжение, так и размер поверхности нагружения являются, в том числе, функциями (накопленных) пластических деформаций:

$$\sigma_{eq} = \sigma_{eq}(\epsilon^{pl}), \quad (2.52)$$

$$R = R(\epsilon^{pl}). \quad (2.53)$$

В существующих моделях уравнение (2.52) чаще всего соответствует поступательному движению поверхности нагружения в пространстве главных напряжений и называется *кинематическим упрочнением* (рис. 2.5б), а уравнение (2.53) – её равномерному «расширению» или «сужению» и называется *изотропным упрочнением* (рис. 2.5а).

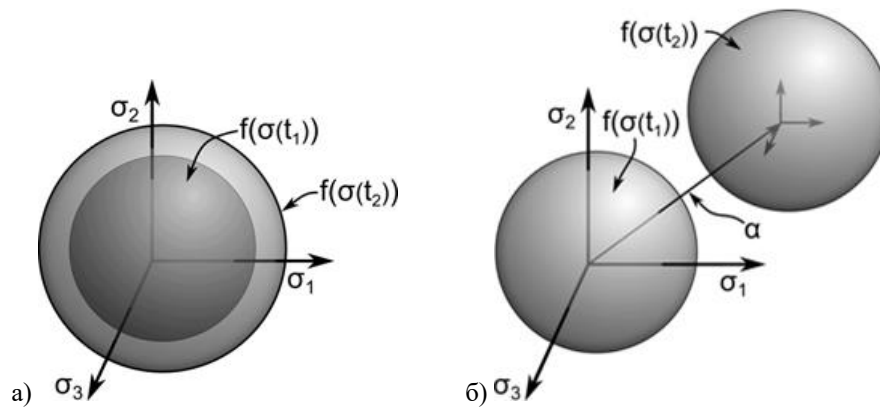


Рис. 2.5 – Модели упрочнения (эволюция поверхности нагружения в пространстве главных напряжений) [155]: а) изотропная; в) кинематическая

Простейшей моделью пластического упрочнения является *модель линейного изотропного упрочнения* (рис. 2.6а), в которой размер  $R$  поверхности нагружения растёт линейно в зависимости от накопленной пластической деформации, а смещения поверхности нагружения не происходит:

$$R = \sigma_0 + R_0 \varepsilon^{pl}, \quad (2.54)$$

где  $\sigma_0$  – начальный размер поверхности нагружения (начальный предел текучести);

$R_0$  – пластический модуль:

$$R_0 = E_p = \frac{EE_T}{E - E_T}, \quad (2.55)$$

$E_T$  – касательный модуль.

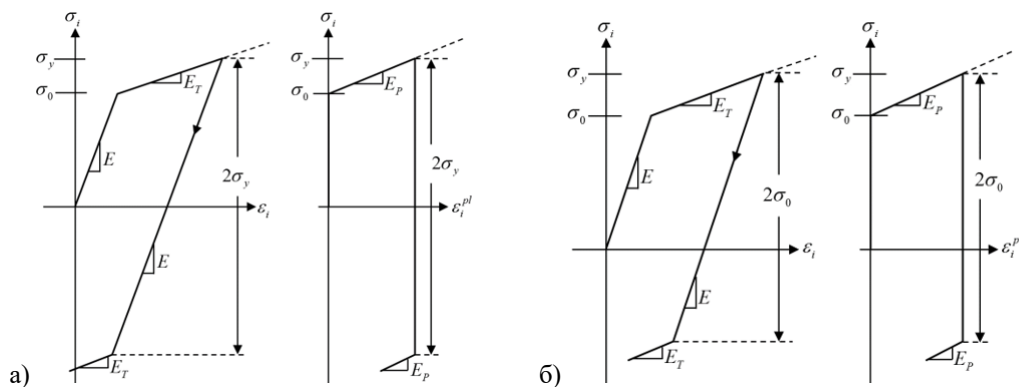


Рис. 2.6 – Модели линейного упрочнения на диаграмме одноосного растяжения-сжатия ( $\sigma_0$  – начальный предел текучести;  $\sigma_y$  – текущий предел текучести;  $E$  – модуль Юнга;  $E_T$  – касательный модуль;  $E_p$  – пластический модуль) [155]: а) изотропная; б) кинематическая

Естественным расширением модели линейного изотропного упрочнения является *модель кусочно-линейного изотропного упрочнения*, в которой множитель при эквивалентной накопленной пластической деформации является кусочно-линейной функцией (см. рис. 2.7а).

Кинематическое упрочнение, в отличие от изотропного, способно учитывать эффект Баушингера (см. рис. 2.8), а его простейшим вариантом является *модель линейного кинематического упрочнения* (см. рис. 2.6б), в которой смещение поверхности нагружения прямо пропорционально пластическим деформациям при отсутствии изменения её размера ( $R \equiv \sigma_0$ ):



$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}(\mathbf{s} - \mathbf{a}) : (\mathbf{s} - \mathbf{a})}, \quad \mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{1}, \quad (2.56)$$

где  $\boldsymbol{\alpha}$  – тензор смещения поверхности нагружения (*тензор остаточных микронапряжений*):

$$d\boldsymbol{\alpha} = \frac{2}{3} C d\boldsymbol{\epsilon}^{pl}; \quad (2.57)$$

$C$  – пластический модуль:

$$C = E_p = \frac{E E_T}{E - E_T}. \quad (2.58)$$

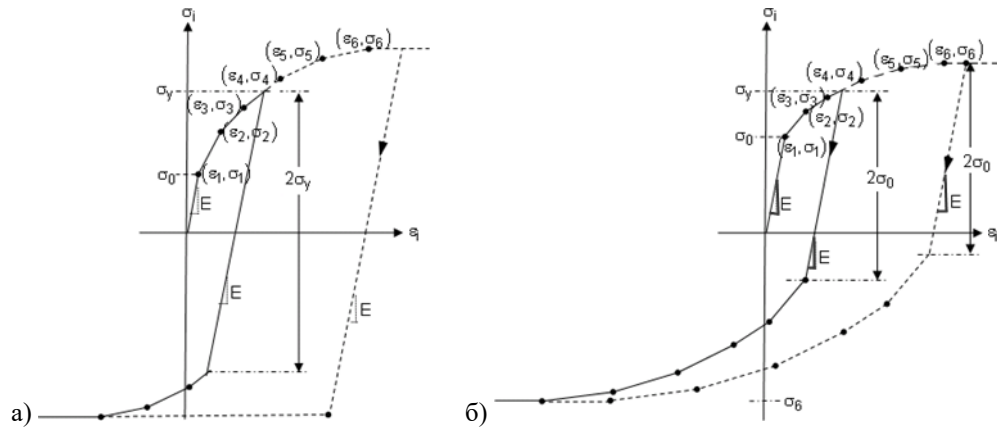


Рис. 2.7 – Модели кусочно-линейного упрочнения на диаграмме одноосного растяжения-сжатия в координатах интенсивность напряжений – интенсивность деформаций ( $\sigma_0$  – начальный предел упругости;  $\sigma_y$  – текущий предел упругости;  $E$  – модуль Юнга) [155]: а) изотропное; б) кинематическое

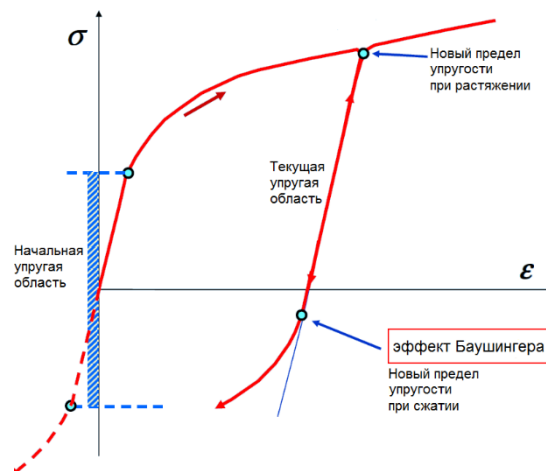


Рис. 2.8 – Эффект Баушингера при одноосном растяжении-сжатии

Как и в случае с изотропным упрочнением, естественным расширением модели линейного кинематического упрочнения является *модель кусочно-линейного кинематического упрочнения* (см. рис. 2.7б), в которой материал предполагается суперпозицией идеальных упруго-пластических материалов с различными модулями упругости и пределами текучести [157].

Для металлов наилучшей сходимости с результатами экспериментов удаётся достичь при использовании модели Армстронга – Фредерика – Шабоса [153, 154] нелинейного кинематического упрочнения (2.56) (рис. 2.5б, рис. 2.9), в которой тензор остаточных микронапряжений  $\boldsymbol{\alpha}$  является суперпозицией  $n$  тензоров микронапряжений:

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i, d\alpha_i = \frac{2}{3} C_i d\varepsilon^{pl} - \gamma_i \alpha_i d\varepsilon^{pl}, \quad (2.59)$$

где  $C_i, \gamma_i$  – начальный модуль упрочнения и его коэффициент убывания соответственно.

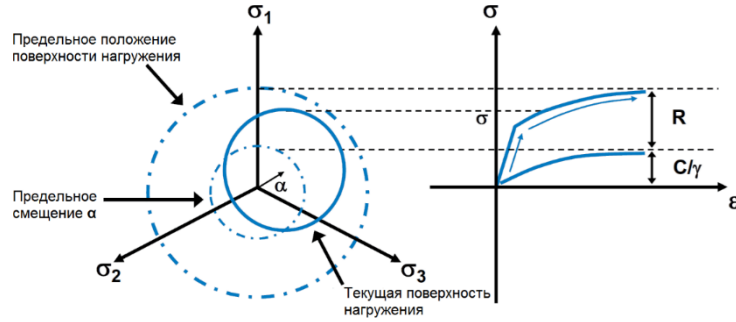


Рис. 2.9 – Модель Армстронга-Фредерика ( $n = 1$ ) в пространстве главных напряжений (слева) и соответствующая диаграмма одноосного растяжения (справа)

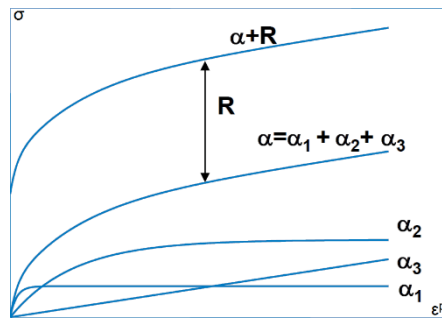


Рис. 2.10 – Модель Армстронга – Фредерика – Шабоса с двумя нелинейными частями  $\alpha_1, \alpha_2$  и одной линейной частью  $\alpha_3$  ( $n = 3$ ) в случае одноосного растяжения (в координатах напряжение – пластическая деформация)

В случае одноосного напряжённого состояния тензоры остаточных микронапряжений в (2.59) приобретают однокомпонентный вид (см. рис. 2.10):

$$\alpha_i = \begin{cases} \frac{C_i}{\gamma_i} (1 - e^{-\gamma_i \varepsilon^{pl}}) & C_i \neq 0 \wedge \gamma_i \neq 0, \\ C_i \varepsilon^{pl} & C_i \neq 0 \wedge \gamma_i = 0, \\ e^{-\gamma_i \varepsilon^{pl}} & C_i = 0 \wedge \gamma_i \neq 0. \end{cases} \quad (2.60)$$

В модели Армстронга – Фредерика – Шабоса для характерного размера  $R$  поверхности нагружения используется модель нелинейного изотропного упрочнения

$$R = \sigma_0 + \int dR, dR = b(R_\infty - R)d\varepsilon^{pl}, \quad (2.61)$$

где  $b$  и  $R_\infty$  – параметры модели. Интегрирование (2.61) даёт

$$R = \begin{cases} \sigma_0 + R_\infty (1 - e^{-b\varepsilon^{pl}}) & R_\infty \neq 0 \wedge b \neq 0, \\ \sigma_0 + e^{-b\varepsilon^{pl}} & R_\infty = 0 \wedge b \neq 0, \\ \sigma_0 & b = 0. \end{cases} \quad (2.62)$$

Исторически раньше Войсом [158] была предложена более общая модель нелинейного изотропного упрочнения, отличающаяся от (2.62) наличием линейного слагаемого (рис. 2.11):

$$R = \sigma_0 + R_0 \varepsilon^{pl} + R_\infty (1 - e^{-b\varepsilon^{pl}}), \quad (2.63)$$

где  $R_0$  – модуль линейного упрочнения.

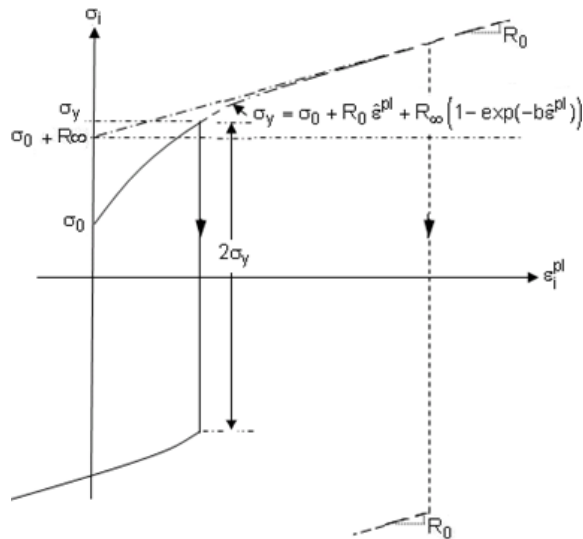


Рис. 2.11 – Модель Войса нелинейного изотропного упрочнения в координатах интенсивность напряжений – интенсивность пластических деформаций [155]

Ещё одной нелинейной моделью является модель Рамберга – Осгуда, которая изначально была предложена для описания пластического участка диаграммы растяжения стандартного образца. В этой модели связь между напряжением и накопленной пластической деформацией является степенной, что для модели изотропного упрочнения приводит к формуле

$$R = \sigma_0 + R_n (\hat{\varepsilon}^{pl})^n, \quad (2.64)$$

где  $R_n$  – пластический модуль;  $0 < n < 1$  – показатель степени.

#### 2.1.4 Критерии разрушения

Разрушением конструкции считается её разделение на части, т.е. образование новых свободных поверхностей. В случае хрупкого разрушения этот процесс начинается с зарождения микротрещин и продолжается их развитием до макроразмеров с постепенным распространением в конструкции. Как только трещина достигает критических размеров, её дальнейший рост становится нестабильным и очень быстрым, что соответствует финальной стадии разрушения. В случае вязкого разрушения сначала наблюдается интенсивное образование пластических деформаций и связанное с ними изменение формы конструкции. В процессе пластического деформирования на линиях скольжения происходит слияние микродефектов структуры материала в макродефекты вплоть до достижения ими критического размера, аналогичного критическому размеру трещины, после чего, как и в случае хрупкого разрушения, начинается резкое и неконтролируемое разрушение конструкции. Таким образом, за начало разрушения логичнее всего принять предельное состояние конструкции, характеризующееся наличием трещин или дефектов размера, критического для действующих нагрузок. Во всех случаях разрушение связано с достижением предельных внутренних усилий в конструкции, однако в случае вязкого разрушения критические размеры дефектов удаётся связать с предельными уровнями пластических деформаций.

В связи с вышесказанным существующие критерии разрушения делятся на два типа:

- силовые критерии хрупкого разрушения

$$\sigma_c \geq \sigma_{max}, \quad (2.65)$$

где  $\sigma_c$  – напряжение, посчитанное на основе заданного критерия;

$\sigma_{max}$  – предельно достижимое в материале напряжение;

- деформационные критерии вязкого разрушения

$$\varepsilon_c \geq \varepsilon_{max}, \quad (2.66)$$

где  $\varepsilon_c$  – деформация, посчитанная на основе заданного критерия;

$\varepsilon_{max}$  – предельно достижимая в материале деформация.

Теоретический предел прочности для кристаллического тела составляет [159]

$$\sigma_{max} = \frac{E}{2\pi} \approx 0,1E, \quad (2.67)$$

однако реальный предел прочности заметно ниже вследствие наличия дефектов структуры материала. Для хрупкого разрушения стали необходимо одновременное выполнение двух условий [160]

$$\begin{cases} \sigma_{eq} \geq \sigma_y, \\ \sigma_1 \geq \sigma_f, \end{cases} \quad (2.68)$$

где  $\sigma_y$  – предел текучести;

$\sigma_f$  – истинное сопротивление отрыву, которое определяется по диаграмме истинных напряжений (см. рис. 2.2), а для низколегированных пластичных сталей может быть приблизительно вычислено по формуле [161]

$$\sigma_f = \sigma_u(1 + 1,4\psi_c); \quad (2.69)$$

$\sigma_u$  – предел прочности (временное сопротивление отрыву);

$\psi_c$  – относительное сужение стандартного образца при разрыве.

В качестве деформационного критерия разрушения чаще всего выступает условие

$$\hat{\varepsilon}^{pl} \geq \varepsilon_{lim}^{pl}, \quad (2.70)$$

где  $\varepsilon_{lim}^{pl}$  – предельная пластическая деформация (ППД), значение которой для материала, не имеющего шейки на стандартном образце, может быть вычислено по формуле

$$\varepsilon_{lim}^{pl} = \varepsilon_f - \frac{\sigma_f}{E} = \ln\left(1 + \delta_c + \frac{\sigma_u}{E}\right) - \frac{\sigma_f}{E}; \quad (2.71)$$

$\delta_c$  – относительное удлинение стандартного образца при разрыве.

При наличии у образца шейки определение ППД выполняется по диаграмме истинных напряжений и истинных деформаций. Как было сказано в п.2.1.2, для её построения в пластической области до достижения временного сопротивления отрыву  $\sigma_u$  необходимо воспользоваться формулами (2.32) и (2.37):

$$\varepsilon_u^t = \ln(1 + \varepsilon_u), \quad (2.72)$$

$$\sigma_u^t = \frac{\sigma_u(1+\varepsilon_u)}{(1-\nu \max \varepsilon_e^{el})^2 (1+\max \varepsilon_e^{el})}. \quad (2.73)$$

Участок от временного сопротивления отрыву  $\sigma_u$  до истинного сопротивления отрыву  $\sigma_f$ , вычисляемого по формуле (2.69), можно полагать линейным и удовлетворяющим условию гладкости диаграммы, т.е. являющимся продолжением левой касательной к диаграмме в точке  $(\varepsilon_u^t, \sigma_u^t)$ :

$$\varepsilon_f = \varepsilon_u^t + \frac{\sigma_f - \sigma_u^t}{E_T(\varepsilon_u^t; \sigma_u^t)}, \quad (2.74)$$

где  $E_T$  – касательный модуль диаграммы истинных деформаций и напряжений. Последнее условие позволяет определить величину ППД:

$$\varepsilon_{lim}^{pl} = \varepsilon_f - \frac{\sigma_f}{E}. \quad (2.75)$$

Поскольку структура материала перед разрушением характеризуется большим числом или размерами внутренних дефектов, гипотезы механики сплошных сред и, следовательно, теории упругости уже не являются корректными. Наиболее точным подходом к решению задачи предельной прочности конструкции является прямое моделирование неоднородностей материала, из которого она изготовлена, с последующим моделированием роста трещин. При этом в связи со случайным характером распределения неоднородностей необходимо пользоваться методами статистической механики и теории вероятностей. Однако подобный подход крайне затратен с вычислительной точки зрения и, по всей видимости, вряд ли достигим в ближайшие несколько десятков лет.

Альтернативой указанному подходу прямого моделирования неоднородностей является критерий с усреднением напряжённого состояния в некотором конечном объёме материала. Широко известен критерий Нейбера – Новожилова, связанный с ростом трещин нормального отрыва, в котором напряжение у вершины трещины усредняется в пределах *структурного элемента* [159]:

$$\frac{1}{d} \int_0^d \sigma_1(\xi) d\xi \geq \sigma_f, \quad (2.76)$$

где  $\sigma_1$  – главное напряжение, отвечающее за раскрытие трещины;

$d$  – размер структурного элемента, который при согласовании с критерием Ирвина равен

$$d = \frac{2}{\pi} \left( \frac{K_{Ic}}{\sigma_f} \right)^2; \quad (2.77)$$

$K_{Ic}$  – критический коэффициент интенсивности напряжений (КИН) для трещины отрыва. Для деформационного критерия предлагается использовать аналогичное структурному критерию усреднение накопленных пластических деформаций:

$$\frac{1}{d} \int_0^d \varepsilon^{pl}(\xi) d\xi \geq \varepsilon_{lim}^{pl}. \quad (2.78)$$

### 2.1.5 Алгоритм проверки предельной прочности

Проверка предельной прочности состоит в выполнении следующих шагов:

- 1) создание КЭ модели, задание граничных условий и приложение предельных нагрузок;
- 2) выбор модели пластического упрочнения и задание пластических свойств материала;
- 3) выполнение расчёта с учётом как физической, так и геометрической нелинейности;
- 4) проверка критериев разрушения.

Поскольку пластические деформации чаще всего затрагивают ограниченную область конструкции, сосредоточенную в её узлах при наличии концентраторов напряжений, в расчётах предельной прочности рекомендуется использовать *метод подмоделирования*. Суть данного метода состоит в выполнении расчётов в два этапа. На первом этапе строится полная КЭ модель конструкции с достаточно грубой сеткой и по возможности с использованием оболочечных или балочных КЭ. На этом этапе материал конструкции допускается полагать линейным, однако расчёт на действие предельных сил  $\{F^{lim}\}$  выполняется обязательно с учётом геометрической нелинейности. На втором этапе строится подмодель интересующего узла конструкции с нелинейными свойствами материала и мелкой сеткой, имеющий размер структурного элемента  $d$  (2.77). При этом рекомендуется использовать модель Армстронга – Фредерика – Шабоса нелинейного кинематического упрочнения (2.59) или модель Войса нелинейного изотропного упрочнения (2.63), демонстрирующие наилучшую точность результатов расчёта, но допускается использовать линейный модели, которые дают более консервативный результат при значении касательного модуля

$$E_T = \frac{\sigma_f - \sigma_y}{\varepsilon_f - \frac{\sigma_y}{E}} \approx \begin{cases} \frac{\sigma_f - \sigma_y}{\ln\left(1 + \delta_c + \frac{\sigma_u}{E}\right) - \frac{\sigma_y}{E}} & \text{без шейки,} \\ \frac{\sigma_f - \sigma_y}{\delta_c + \frac{\sigma_f - \sigma_y}{E}} & \text{с шейкой,} \end{cases} \quad (2.79)$$

где истинное сопротивление отрыву  $\sigma_f$  вычисляется по формуле (2.69). Для выполнения упруго-пластического расчёта узла к нему прикладывается та часть вектора предельных сил  $\{F^{lim}\}$ , которая попадает на подмодель, а граничными условиями являются перемещения границы узла, полученные из решения грубой модели всей конструкции на первом этапе. Если в результате расчёта в каком-либо конечном элементе выполняется хотя бы одно их условий (2.76) или (2.78), то конструкция считается разрушенной.

## 2.2 Проверка устойчивости конструкций

Проверка устойчивости конструкции состоит в проверке её способности выдерживать расчётные нагрузки без существенного отклонения от первоначальной формы. Существуют два подхода: проверка линейной устойчивости и проверка нелинейной устойчивости. Ниже

рассматривается каждый из них, а в конце даётся алгоритм проверки устойчивости с рекомендациями по её конкретному выполнению.

### 2.2.1 Линейная устойчивость

Классическим примером задачи линейной устойчивости является задача шарнирно опертого стержня, сжатого продольными силами по концам (см. рис. 2.12), которую впервые решил Л. Эйлер в 1744 г.

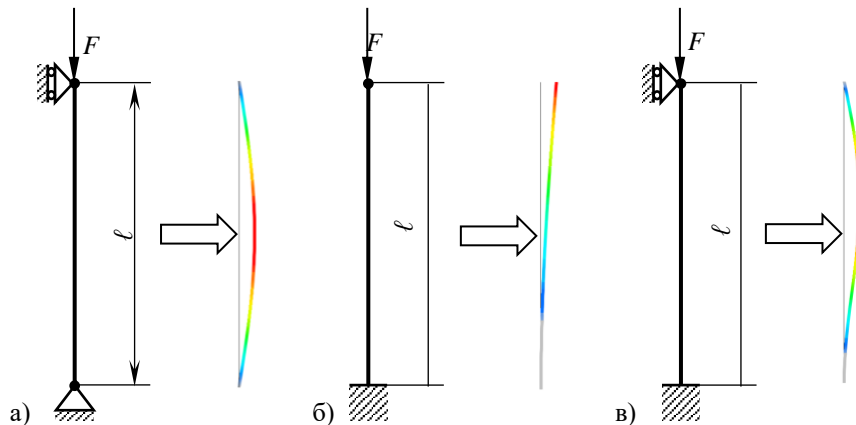


Рис. 2.12 – Формы потери устойчивости сжатого стержня (цвета обозначают величину поперечной деформации при потере устойчивости): а) шарнирное опирание по концам; б) жёсткая заделка нижнего конца; в) жёсткая заделка нижнего конца и шарнирное опирание верхнего

Проверка линейной (эйлеровой) устойчивости происходит в предположении, что материал и конструкция ведут себя линейно. В результате решения линейной задачи (2.19) в конструкции определяются напряжения (2.8) и (2.28), с помощью которых находится *матрица*  $[S_e]$  *геометрической жёсткости* КЭ, для твердотельных элементов имеющая вид [151]

$$[S_e] = \begin{bmatrix} [S_0] & 0 & 0 \\ 0 & [S_0] & 0 \\ 0 & 0 & [S_0] \end{bmatrix}, \quad (2.80)$$

где

$$[S_0] = \iiint_{Vol} [S_g]^T [S_m] [S_0] dV; \quad (2.81)$$

$Vol$  – объём КЭ;

$[S_m]$  – матрица напряжений КЭ:

$$[S_m] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}; \quad (2.82)$$

$[S_g]$  – матрица градиентов функций формы КЭ:

$$[S_g] = \nabla\{N\}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial z} \end{bmatrix}; \quad (2.83)$$

$N_i$  – функция формы твердотельного КЭ,  $i = 1, \dots, 8$ .

Полная матрица  $[S]$  геометрической жёсткости всей конструкции есть сумма матриц геометрической жёсткости отдельных КЭ в едином для всех КЭ базисе:

$$[S] = \sum_{e=1}^{N_{elem}} [S_e]. \quad (2.84)$$

Тогда матрица остаточной (или поперечной) жёсткости  $[K_R]$  является разностью полной матрицы жёсткости  $[K]$  и полной матрицы геометрической жёсткости:

$$[K_R(\{F\})] = [K] - [S(\{F\})], \quad (2.85)$$

Поскольку матрица  $[S_g]$  является постоянной для КЭ, а напряжения в матрице  $[S_m]$  линейно зависят от деформаций (2.8), в свою очередь также линейно связанных с перемещениями (2.11), матрица геометрической жёсткости  $[S]$  линейно зависит от приложенной нагрузки  $\{F\}$ :

$$[S(\lambda\{F\})] = \lambda[S(\{F\})]. \quad (2.86)$$

Если полученная матрица остаточной жёсткости  $[K_R]$  является вырожденной, то конструкция в отсутствие дополнительных внешних сил получает дополнительные (неограниченные) перемещения  $\{v\}$ :

$$[K_R(\{F\})]\{v\} = \{0\}, \quad (2.87)$$

что с учётом (2.85) и (2.86) даёт

$$([K] - \lambda[S(\{F\})])\{v\} = \{0\}, \quad (2.88)$$

где  $\lambda$  – искомый коэффициент запаса линейной устойчивости, являющийся множителем вектора  $\{F\}$  приложенных к конструкции нагрузок;

$\{v\}$  – вектор перемещений, описывающий форму потери устойчивости, которая соответствует найденному числу  $\lambda$ .

Легко видеть, что если  $\{v\}$  – решение уравнения (2.88), то  $c\{v\}$  ( $c = \text{const}$ ) также является решением этого уравнения. Из всех таких решений принято выдавать решение с единичной  $\infty$ -нормой:

$$\|v\|_{\infty} = \max_i |v_i| = 1. \quad (2.89)$$

Любая конструкция содержит несовершенства, т.е. отклонения от идеальных форм, которые, например, для стержня характеризуются его начальной погибью. При решении задачи линейной устойчивости максимальные прогибы  $u$  конструкции или её элементов, вызванные внецентренным сжатием, связанным с указанными несовершенствами, растут линейно с ростом приложенной нагрузки  $F$  вплоть до достижения критической нагрузки  $F^{cr}$ , равной эйлеровой  $F^e$ :

$$F^{cr} = F^e, \quad (2.90)$$

после чего несущая способность конструкции резко падает (см. рис. 2.13).



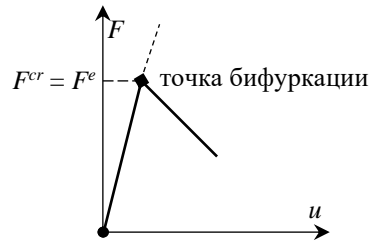


Рис. 2.13 – Зависимость нагрузки от прогиба в задаче линейной устойчивости

### 2.2.2 Нелинейная устойчивость

В действительности потеря устойчивости происходит несколько раньше, чем это предсказывают расчёты линейной устойчивости (см. рис. 2.14):

$$F^{cr} < F^e. \quad (2.91)$$

Это связано с двумя факторами. Во-первых, жёсткость конструкции меняется в процессе деформирования, т.е. матрица жёсткости  $[K]$  на самом деле зависит от вектора перемещений  $\{u\}$  (геометрическая нелинейность):

$$[K] = [K(\{u\})]. \quad (2.92)$$

Во-вторых, в процессе деформирования в конструкции могут появляться пластические деформации, т.е. связь между напряжениями и деформациями становится нелинейной (физическая нелинейность). Оба этих обстоятельства говорят о нелинейной зависимости матрицы геометрической жёсткости  $[S]$  от приложенной нагрузки  $\{F\}$ . Поэтому решение задачи нелинейной устойчивости требует учёта как геометрической, так и физической нелинейности.

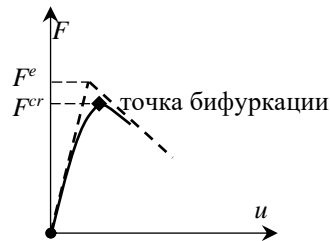


Рис. 2.14 – Зависимость нагрузки от прогиба в задаче нелинейной устойчивости: - - линейная задача; — нелинейная задача

Коэффициент запаса по нагрузке при расчёте нелинейной устойчивости  $\lambda^{nl}$  должен быть не менее единицы:

$$\lambda^{nl} = \frac{\|\{F^{cr}\}\|}{\|\{F\}\|} \geq 1. \quad (2.93)$$

### 2.2.3 Алгоритм проверки устойчивости

В общем случае проверка устойчивости конструкции состоит в выполнении следующих шагов:

- 1) решение статической задачи при действии расчётных нагрузок  $\{F\}$ ;
- 2) определение линейного коэффициента запаса  $\lambda$  и формы потери устойчивости  $\{v\}$ ;

- 3) решение статической задачи, учитывающей несовершенства конструкции (начальные погиби), а также геометрическую и физическую нелинейности, с пошаговым увеличением нагрузки не более чем от половины эйлеровой  $\{F_0\} \leq \frac{1}{2}\{F^e\}$  до полной эйлеровой  $\{F^e\} = \lambda\{F\}$ ;
- 4) выявление критической нагрузки  $\{F^{cr}\}$ , характеризующейся резким ростом перемещений конструкции при малом шаге увеличения нагрузки;
- 5) определение коэффициента запаса по нагрузке (2.93).

Статическая задача на шаге 1, вообще говоря, может являться нелинейной (как геометрически, так и физически). Это позволяет точнее вычислить как матрицу жёсткости  $[K]$  (2.92), так и матрицу геометрической жёсткости  $[S]$  (2.84), что даёт уже более реальное значение коэффициента запаса  $\lambda$  при расчёте линейной устойчивости на шаге 2.

В качестве начальной погиби на шаге 3 рекомендуется принимать нормированную первую форму потери устойчивости  $\{v\}$  (2.89) с некоторым разумным масштабным множителем  $\mu$ , модуль которого обыкновенно не превышает единицы.

Искомая на шаге 4 критическая нагрузка  $\{F^{cr}\}$  характеризуется не менее чем полуторакратным увеличением приращения перемещения конструкции  $\Delta u$  при постоянном приращении нагрузки  $\{\Delta F\}$  (см. рис. 2.16):

$$\frac{\Delta u_k}{\Delta u_{k-1}} = \frac{u_k - u_{k-1}}{u_{k-1} - u_{k-2}} \geq 1,5 \dots 2 \Rightarrow \{F^{cr}\} = \{F_{k-1}\}, \quad (2.94)$$

$$\{F_k\} = \{F_{k-1}\} + \{\Delta F\}, \quad k = 1, \dots, K. \quad (2.95)$$

Шаг приращения нагрузки  $\{\Delta F\}$  рекомендуется принимать не более 1 % от эйлеровой:

$$\{\Delta F\} = \frac{\{F^e\} - \{F_0\}}{K} \leq 0,01\{F^e\}. \quad (2.96)$$

При этом начальная нагрузка  $\{F_0\}$  не должна приводить к появлению пластических деформаций в конструкции. Если условие (2.94) не выполняется вплоть до  $\{F_k\} = \{F^e\}$ , то критическая нагрузка полагается равной эйлеровой  $\{F^{cr}\} = \{F^e\}$ .

При выполнении параметрической оптимизации конструкции, учитывающей ограничение на коэффициент запаса по устойчивости, рекомендуется решать статическую задачу в линейной постановке и определять коэффициент запаса линейной устойчивости, что существенно ускоряет процесс вычислений. В таком случае необходимо использовать ограничение (1.43) на наименьший коэффициент запаса.

При наличии нескольких расчётных случаев все они должны быть проверены на устойчивость с указанными выше ограничениями на коэффициенты запаса (1,2...1,3 – для линейной устойчивости, 1,0 – для нелинейной устойчивости).

Рассмотрим работу приведенного алгоритма на примере проверки устойчивости эйлера стержня (рис. 2.12) в ПК ANSYS Workbench. Схема проекта показана на рис. 2.15. В блоке А

выполняется решение статической задачи сжатия стержня единичной силой  $F = 1$ , причём в этой задаче выполнен учёт как геометрической, так и физической нелинейности. В блоке В решается задача определения коэффициента запаса линейной устойчивости  $\lambda$  и соответствующей формы  $\{v\}$  (2.88) потери устойчивости. Найденная нормированная форма (2.89) с масштабным множителем  $\mu = 0,001$  передаётся в блок С, где она становится несовершенством конструкции стержня (его начальной погибью). В блоке С выполняется решение статической нелинейной задачи нагружения стержня, имеющего начальную погибь, сжимающей силой  $F^e = \lambda F$ , которая пошагово увеличивается от нуля до указанного значения. В результате определяется диаграмма зависимости силы от бокового прогиба стержня (рис. 2.16), по которой выявляется значение критической силы  $F^{cr}$ . Сравнение полученных численных результатов с аналитическими приведено в табл. 2.1.

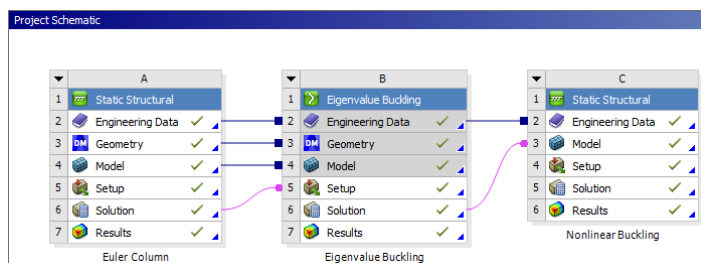


Рис. 2.15 – Расчёт устойчивости эйлера стержня. Схема проекта задачи: А – статическая задача с учётом геометрической и физической нелинейностей; В – задача линейной устойчивости (определение линейного коэффициента запаса по нагрузкам); С – задача нелинейной устойчивости

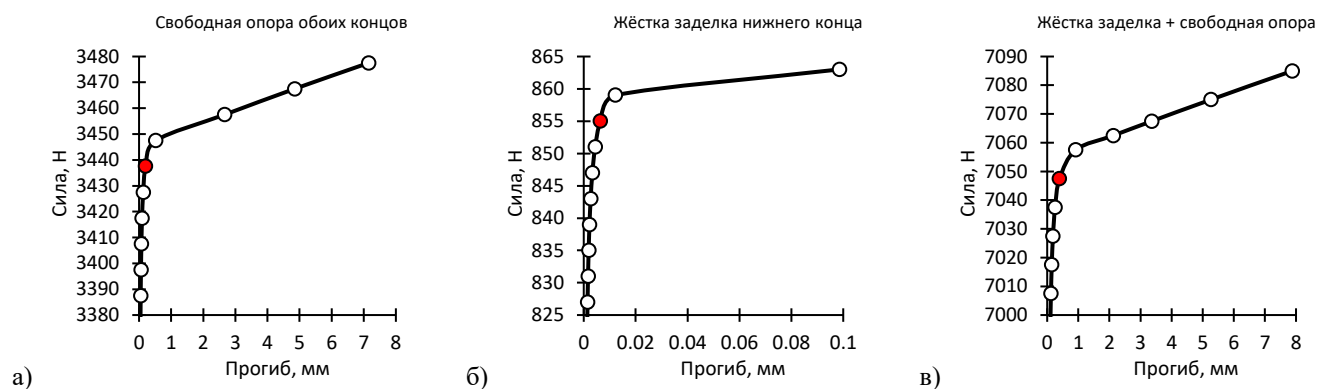


Рис. 2.16 – Зависимости силы от прогиба для трёх вариантов опирания стержня:  $\circ$  – расчётные точки;  $\bullet$  – точка потери устойчивости, соответствующая критической силе  $F^{cr}$

Табл. 2.1 – Значения критической силы  $F^{cr}$ , Н, для сжатого стержня с различными условия закрепления концов

Метод	Свободная опора обоих концов	Жёсткая заделка нижнего конца	Жёсткая заделка нижнего конца + свободная опора верхнего
Аналитический (Эйлер)	3454,4	863,6	7049,7
МКЭ линейный	3453,5	863,5	7062,8
МКЭ нелинейный	3437,5	855,0	7047,5

## 2.3 Проверка усталостной прочности конструкций

Проверка усталостной прочности конструкции состоит в сопоставлении расчётной оценки

её ресурса с заданной проектной величиной. Оценка ресурса выполняется на основе модели усталостной прочности с использованием реализаций расчётных величин напряжений или деформаций.

В настоящее время расчёты прочности в подавляющем большинстве случаев выполняются с применением МКЭ, который в своих результатах выдаёт все компоненты как тензора напряжений  $\sigma$ , так и тензора деформаций  $\varepsilon$ . Расчёты усталостной прочности предполагают наличие переменной во времени нагрузки, что влечёт за собой изменение во времени  $t$  обоих тензоров:

$$\sigma = \sigma(t), \varepsilon = \varepsilon(t). \quad (2.97)$$

Для оценки усталостной прочности при использовании рассматриваемых далее моделей (п.2.3.1) требуется, во-первых, свести тензоры напряжений  $\sigma(t)$  и деформаций  $\varepsilon(t)$  к некоторому расчётному напряжению  $\sigma_c(t)$  и некоторой расчётной деформации  $\varepsilon_c(t)$  соответственно (п.2.3.2) и, во-вторых, по полученным реализациям расчётных величин определить меру  $D$  накопленных усталостных повреждений (п.2.3.3).

Следует отметить, что в общем случае во время непропорционального нагружения главные оси тензора  $\sigma$  (и, следовательно, тензора  $\varepsilon$ ) могут поворачиваться в материальной системе координат, что, как показывают эксперименты, ускоряет процесс накопления усталостных повреждений.

При решении оптимизационных задач в целях ускорения процесса вычислений рекомендовано использовать упрощённый подход к обеспечению ресурса, состоящий в ограничении коэффициента концентрации напряжений величиной 1,5...2.

### 2.3.1 Модели усталостной прочности

Все существующие модели усталостной прочности можно разделить на три группы:

- силовые модели на основе S-N кривых;
- деформационные модели на основе E-N кривых;
- модели критической плоскости.

Силовые модели в основном применяются при расчёте многоциклового усталости (МнЦУ), когда в макрообъёмах не наблюдается образование пластических деформаций, а число циклов до разрушения  $N_f$  обычно превышает  $10^5$ . Деформационные модели чаще применяются при расчёте малоциклового усталости (МаЦУ), которая связана с появлением пластических деформаций в макрообъёмах, что характерно при числе циклов до разрушения  $N_f$  менее  $10^4$ . В промежутке  $10^4 \leq N_f \leq 10^5$  возможно как наличие, так и отсутствие пластических деформаций, что очень сильно зависит от свойств материала и его микроструктуры. Модели критической плоскости основаны на задании критерия начала усталостного разрушения и поиска плоскости, на которой

этот критерий достигает своего экстремума.

### 2.3.1.1 Силовые модели

Самой распространённой и общепризнанной силовой моделью на основе S-N кривых стала модель О. Басквина (1910), связывающая размах нормальных напряжений в цикле  $\Delta\sigma$  (см. рис. 2.17) с числом циклов до разрушения  $N_f$  (см. рис. 2.18) [162]:

$$\Delta\sigma = \sigma'_f N_f^b, \quad (2.98)$$

где  $\sigma'_f$  – коэффициент усталостной прочности;

$b$  – параметр Басквина;

$$\Delta\sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min} > 0; \quad (2.99)$$

$\sigma_{max}$  – максимальное напряжение в цикле (см. рис. 2.17);

$\sigma_{min}$  – минимальное напряжений в цикле (см. рис. 2.17).

Из уравнения (2.98) по имеющемуся размаху напряжений  $\Delta\sigma$  определяется долговечность  $N_f$ .

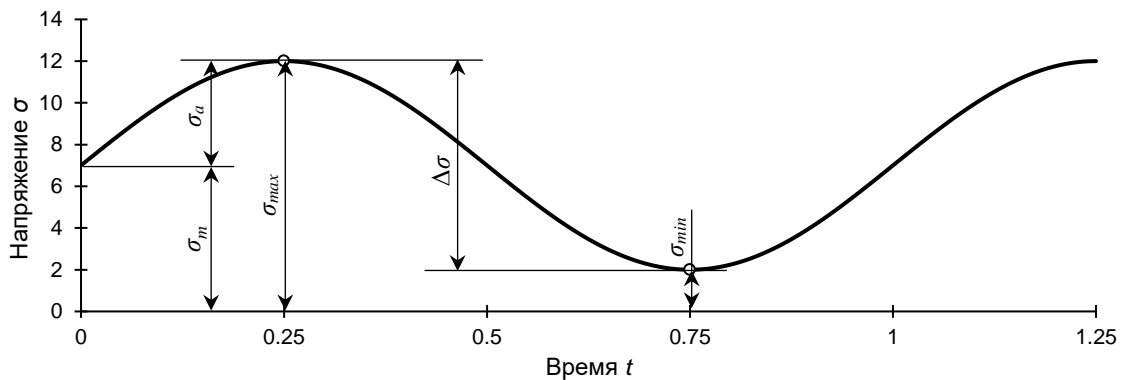


Рис. 2.17 – Пример элементарного цикла в реализации расчётных напряжений

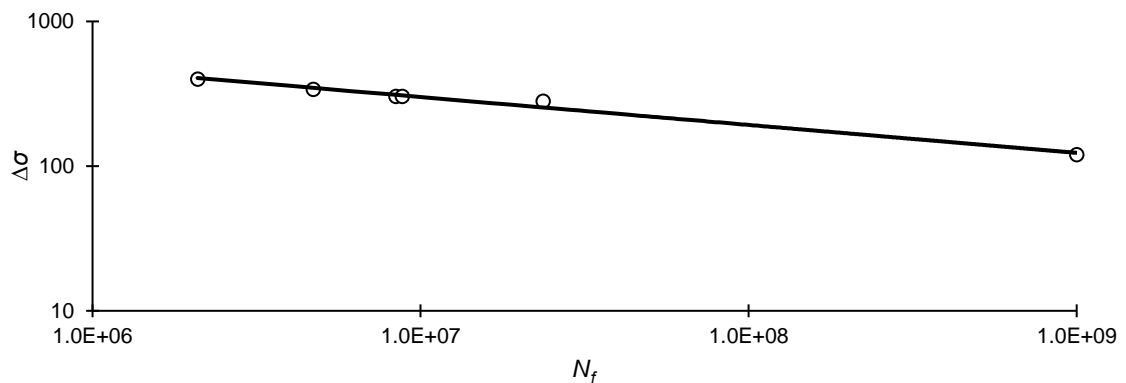


Рис. 2.18 – S-N кривая стали 38ХНЗМФА:  $\circ$  – экспериментальные данные; — – степенная регрессия

Параметры  $\sigma'_f$  и  $b$  модели Басквина обычно получают на образцах, подверженных симметричному циклу растяжения-сжатия, характеризующемуся нулевым средним напряжением  $\sigma_m = 0$ . В реальности реализация расчётных напряжений почти всегда имеет ненулевое среднее напряжение (см. рис. 2.17):

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} \begin{cases} > 0 & \text{растяжение,} \\ = 0 & \text{симметричный цикл,} \\ < 0 & \text{сжатие.} \end{cases} \quad (2.100)$$

Экспериментально показано, что растягивающее среднее напряжение приводит к снижению усталостной долговечности  $N_f$ , а сжимающее – к увеличению.

Существуют следующие способы приведения несимметричного цикла к симметричному (см. рис. 2.19) [163, 164]:

- коррекция Герберга (1874)

$$\sigma_{ar} = \frac{\sigma_a}{1 - \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_u}\right)^2}, \quad (2.101)$$

- коррекция Гудмана (1899)

$$\sigma_{ar} = \frac{\sigma_a}{1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_u}}, \quad (2.102)$$

- коррекция Содерберга (1930)

$$\sigma_{ar} = \frac{\sigma_a}{1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_y}}, \quad (2.103)$$

- коррекция Морроу (1968)

$$\sigma_{ar} = \frac{\sigma_a}{1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_f}}, \quad (2.104)$$

- коррекция Уолкера (1970)

$$\sigma_{ar} = \sigma_{max}^{1-\gamma} \sigma_a^\gamma = \sigma_a \left(\frac{2}{1-R}\right)^\gamma = \frac{\sigma_a}{\left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_{max}}\right)^\gamma}, \quad (2.105)$$

- коррекция Смита – Уотсона – Топпера (1970)

$$\sigma_{ar} = \sqrt{\sigma_{max} \sigma_a} = \sigma_a \sqrt{\frac{2}{1-R}} = \frac{\sigma_a}{\sqrt{1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_{max}}}}, \quad (2.106)$$

- коррекция Квофи (2001)

$$\sigma_{ar} = \sigma_a \exp\left(\theta \frac{\sigma_m}{\sigma_u}\right), \quad (2.107)$$

где  $\sigma_a$  – амплитуда расчётного несимметричного цикла (см. рис. 2.17):

$$\sigma_a = \frac{\Delta\sigma}{2} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} > 0; \quad (2.108)$$

$\sigma_{ar}$  – эквивалентная амплитуда симметричного цикла (для S-N кривой);

$\sigma_u$  – предел прочности (временное сопротивление отрыву);

$\sigma_y$  – предел текучести;

$\sigma_f$  – истинный предел прочности (из диаграммы истинных напряжений);

$R$  – коэффициент асимметрии цикла:

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = \frac{2\sigma_m}{\sigma_{max}} - 1; \quad (2.109)$$

$\theta$  – коэффициент Квофи.

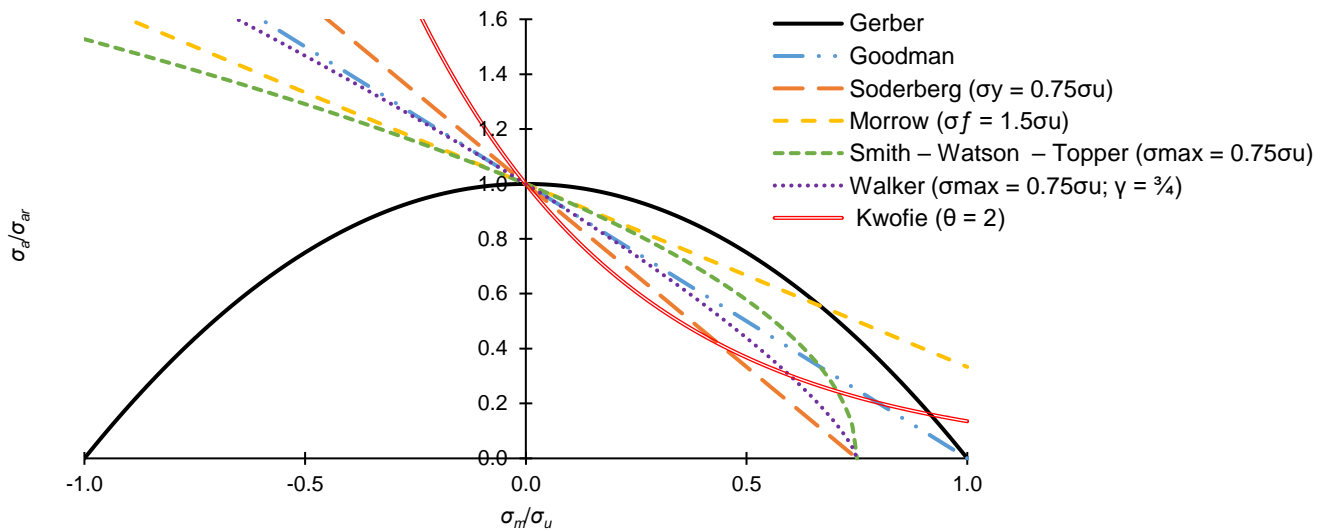


Рис. 2.19 – Сопоставление различных способов учёта средних напряжений в цикле (область под графиками соответствует безопасному нагружению, а над графиками – опасному)

Поскольку коррекция Гербера (2.101) даёт неконсервативные оценки при растягивающем среднем напряжении и сильно занижает усталостную долговечность при сжимающем среднем напряжении, её использование не рекомендуется.

### 2.3.1.2 Деформационные модели

С.С. Мэнсон (1953) и независимо от него Л.Ф. Коффин (1954) рассматривают малоцикловую усталость и по аналогии с S-N кривыми связывают амплитуду пластической деформации в цикле  $\varepsilon_a^{pl}$  с числом циклов до разрушения  $N_f$ :

$$\varepsilon_a^{pl} = \frac{\Delta\varepsilon^{pl}}{2} = \varepsilon_f' (2N_f)^c, \quad (2.110)$$

где  $\varepsilon_f'$  – коэффициент усталостной вязкости;

$c$  – параметр Мэнсона – Коффина.

Эта модель чаще всего применяется в случае преобладания в цикле пластической деформации, что обычно соответствует малоциклового усталости при  $N_f \leq 10^3$ . Более корректные результаты получаются при объединении модели Мэнсона – Коффина с моделью Басквина, в которой размах напряжений  $\Delta\sigma$  в цикле связан с размахом упругих деформаций  $\Delta\varepsilon^{el}$  законом Гука:

$$\Delta\sigma = E\Delta\varepsilon^{el}, \quad (2.111)$$

где  $E$  – модуль Юнга материала. Тогда полный размах деформаций в цикле есть сумма упругой и пластической частей:

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^{el} + \Delta\varepsilon^{pl}, \quad (2.112)$$

что с учётом (2.110), (2.111) и (2.98) даёт выражение [162]

$$\varepsilon_a = \frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\Delta\varepsilon^{el}}{2} + \frac{\Delta\varepsilon^{pl}}{2} = \frac{\sigma_f'}{E} (2N_f)^b + \varepsilon_f' (2N_f)^c, \quad (2.113)$$

являющееся уравнением модели Басквина – Мэнсона – Коффина, которое по имеющейся амплитуде полной деформации  $\varepsilon_a$  позволяет определить усталостную долговечность  $N_f$ . Для этой

модели существуют два основных способа учёта средних напряжений в цикле [162]:

- коррекция Морроу

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma'_f - \sigma_m}{E} (2N_f)^b + \varepsilon'_f (2N_f)^c, \quad (2.114)$$

- коррекция Смита – Уотсона – Топпера (1970) [165]

$$\sigma_{max} \varepsilon_a = \sigma'_f (2N_f)^b \left( \frac{\sigma'_f}{E} (2N_f)^b + \varepsilon'_f (2N_f)^c \right) = \frac{\sigma'^2_f}{E} (2N_f)^{2b} + \sigma'_f \varepsilon'_f (2N_f)^{b+c}. \quad (2.115)$$

Как видно, коррекция Морроу учитывает влияние средних напряжений  $\sigma_m$  только на упругую часть деформаций, а коррекция Смита – Уотсона – Топпера – на всю деформацию в целом.

Необходимо отметить, что коррекция Смита – Уотсона – Топпера предсказывает бесконечную усталостную долговечность  $N_f$  при отрицательных максимальных напряжениях в цикле  $\sigma_{max} < 0$ , т.е. при нагружении, характеризующемся только сжатием. Это справедливо для трещин нормального отрыва, которые при действии сжимающего напряжения остаются в закрытом состоянии. Таким образом, циклы с отрицательным максимальным напряжением могут быть исключены из реализаций расчётных величин как ненаносящие усталостных повреждений.

В работе [5] была предложена модификация модели Басквина – Мэнсона – Коффина с коррекцией Смита – Уотсона – Топпера учитывающая усреднение в пределах структурного элемента  $d$  (2.77) максимальных за цикл главных напряжений  $\sigma_1^{max}$  и амплитуды полной главной деформации  $\varepsilon_1^a$ :

$$\bar{\sigma}_1^{max} \bar{\varepsilon}_1^a = \frac{\sigma'^2_f}{E} (2N_f)^{2b} + \sigma'_f \varepsilon'_f (2N_f)^{b+c}, \quad (2.116)$$

где

$$\bar{\sigma}_1^{max} = \frac{1}{d} \int_0^d \sigma_1^{max}(\xi) d\xi, \quad (2.117)$$

$$\bar{\varepsilon}_1^a = \frac{1}{d} \int_0^d \varepsilon_1^a(\xi) d\xi. \quad (2.118)$$

### 2.3.1.3 Модели критической плоскости

Критической плоскостью называют ту, на которой происходит усталостное разрушение. В случае плоского напряжённого состояния положение каждой плоскости, подозрительной на роль критической, определяется углом  $\phi$  между её нормалью и осью  $Ox$  локальной системы координат. Тогда критической плоскостью является та, на которой расчётная оценка усталостной долговечности  $N_f^\phi$  достигает своего минимума:

$$\phi_c = \operatorname{argmin}_{0 \leq \phi < \pi} N_f^\phi. \quad (2.119)$$

#### 2.3.1.3.1 Модель Финдли

Основная идея У.Н. Финдли (1958) состоит в том, что усталостное разрушение начинается на той плоскости, где сумма амплитуды касательного напряжения  $\tau_a = \Delta\tau/2$  и среднего за цикл



нормального напряжения  $\sigma_m$  достигает своего максимума [166]:

$$\hat{\tau}_a^\phi = \frac{\Delta\tau^\phi}{2} + k\sigma_m^\phi, \quad (2.120)$$

где  $\phi$  – угол ориентации плоскости при плоском напряжённом состоянии;

$k$  – константа материала (калибровочный коэффициент модели).

Полученное расчётное напряжение (2.120) используется в уравнении Басквина, адаптированном под касательные напряжения:

$$\hat{\tau}_a^\phi = \sqrt{1 + k^2} \tau_f' N_f^{b_\gamma}, \quad (2.121)$$

где  $\tau_f'$  – коэффициент усталостной прочности в экспериментах МНЦУ на кручение;

$b_\gamma$  – параметр Басквина в экспериментах на кручение ( $b_\gamma \approx b$ );

При этом чаще всего  $\sqrt{1 + k^2} \approx 1,04$ , что соответствует  $k \approx 0,29$ . Из уравнения (2.121) для каждой плоскости  $\phi$  находится усталостная долговечность  $N_f^\phi$ .

### 2.3.1.3.2 Модель Смита – Уотсона – Топпера

К. Смит, П. Уотсон и Т. Топпер изначально предложили свой подход для учёта средних напряжений в цикле для силовой модели Басквина и для деформационной модели Басквина – Мэнсона – Коффина. Однако оказалось, что предложенный ими подход (2.115) хорошо описывает образование усталостных трещин нормального отрыва (см. рис. 2.20). Таким образом, в модели Смита – Уотсона – Топпера усталостное разрушение начинается на той плоскости  $\phi$ , где произведение наибольшего за цикл нормального напряжения  $\sigma_{max}^\phi$  на амплитуду полной деформации растяжения  $\varepsilon_a^\phi$  достигает своего максимума. Это произведение принято называть *SWT параметром*:

$$SWT = \sigma_{max}^\phi \varepsilon_a^\phi. \quad (2.122)$$

Полученное расчётное значение SWT параметра (2.122) используется в уравнении (2.115) Басквина – Мэнсона – Коффина с коррекцией средних напряжений Смита – Уотсона – Топпера, что позволяет для каждой плоскости  $\phi$  найти усталостную долговечность  $N_f^\phi$ .

Необходимо отметить, что модель SWT можно рассматривать как энергетическую.

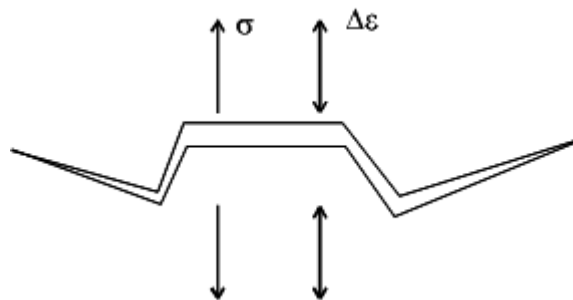


Рис. 2.20 – Трещина нормального отрыва

### 2.3.1.3.3 Модель Брауна – Миллера

М.У. Браун и К.Д. Миллер (1973) после экспериментального исследования влияния многоосного напряжённого состояния на усталостную долговечность предположили, что усталостное разрушение начинается на той плоскости  $\phi$ , где размах сдвиговой деформации  $\Delta\gamma^\phi$  достигает своего максимума. При этом расчётной деформацией является сумма амплитуды сдвиговой деформации  $\gamma_a^\phi = \Delta\gamma^\phi/2$  и размаха деформации растяжения  $\Delta\varepsilon^\phi$ , перпендикулярной найденной плоскости [167]:

$$\hat{\gamma}_a^\phi = \frac{\Delta\gamma^\phi}{2} + S\Delta\varepsilon^\phi, \quad (2.123)$$

где  $S$  – константа материала (калибровочный коэффициент модели). Полученная расчётная деформация (2.123) используется в модифицированном уравнении Баскина – Мэнсона – Коффина с коррекцией средних напряжений Морроу:

$$\hat{\gamma}_a^\phi = A \frac{\sigma_f'^{-2} \sigma_m^\phi}{E} (2N_f)^b + B \varepsilon_f' (2N_f)^c, \quad (2.124)$$

где  $\sigma_m^\phi$  – среднее напряжение, нормальное плоскости  $\phi$ ;

$A, B$  – параметры модели, для которых обычно используются значения

$$A = 1,3 + 0,7S, B = 1,5 + 0,5S. \quad (2.125)$$

Из уравнения (2.124) для каждой плоскости  $\phi$  находится усталостная долговечность  $N_f^\phi$ .

### 2.3.1.3.4 Модель Фатеми – Соци

А. Фатеми и Д.Ф. Соци (1988) предложили модификацию модели Брауна – Миллера, в которой размах деформации растяжения заменяется на отношение наибольшего за цикл напряжения  $\sigma_{max}^\phi$ , нормального плоскости  $\phi$ , к пределу текучести материала  $\sigma_y$  [168]:

$$\frac{\Delta\gamma^\phi}{2} \left( 1 + k \frac{\sigma_{max}^\phi}{\sigma_y} \right) = \frac{\tau_f'}{G} (2N_f)^{b_\gamma} + \gamma_f' (2N_f)^{c_\gamma}, \quad (2.126)$$

где  $k$  – параметр модели (в первом приближении  $k \approx 0,29$ );

$G$  – модуль сдвига:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}; \quad (2.127)$$

$\nu$  – коэффициент Пуассона;

$\gamma_f'$  – коэффициент усталостной вязкости в экспериментах МаЦУ на кручение;

$c_\gamma$  – параметр Мэнсона – Коффина в экспериментах на кручение ( $c_\gamma \approx c$ ).

Из уравнения (2.126) для каждой плоскости  $\phi$  находится усталостная долговечность  $N_f^\phi$ .

Физическое обоснование модели Фатеми – Соци состоит в следующем. Во время нагружения сдвигом на берегах трещины, имеющей неправильную форму, возникают силы трения, которые уменьшают напряжение на кончике трещины, тем самым препятствуя её росту

и увеличивая усталостную долговечность. Растягивающие напряжения и деформации отделяют берега трещины и уменьшают силы трения (см. рис. 2.21).

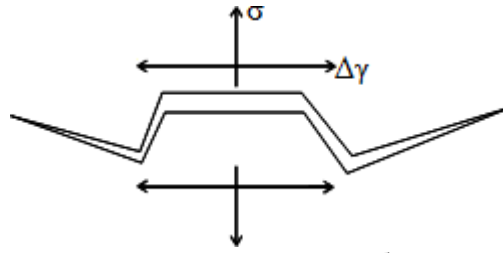


Рис. 2.21 – Трещина сдвига: напряжение растяжения разделяет берега трещины, тем самым снижая трение

### 2.3.1.3.5 Модель МакДиармида

Д.Л. МакДиармид (1991) предположил, что разрушение начинается на плоскости, имеющей максимальную амплитуду касательных напряжений. При этом расчётным напряжением является сумма амплитуды касательного напряжения  $\tau_a^\phi = \Delta\tau^\phi/2$  и наибольшего за цикл напряжения  $\sigma_{max}^\phi$ , нормального плоскости  $\phi$ , с весовым коэффициентом отношения предела выносливости  $\tau_{A,B}$  к удвоенному пределу прочности  $\sigma_u$  [169]:

$$\hat{\tau}_a^\phi = \frac{\Delta\tau^\phi}{2} + \frac{\tau_{A,B}}{2\sigma_u} \sigma_{max}^\phi, \quad (2.128)$$

где  $\tau_{A,B}$  – предел выносливости для трещин сдвига (A) и среза (B) соответственно. Полученное расчётное напряжение (2.128) используется в адаптированном под касательные напряжения варианте уравнения Басквина

$$\hat{\tau}_a^\phi = \tau_f' N_f^{b\gamma}, \quad (2.129)$$

из которого для каждой плоскости  $\phi$  находится усталостная долговечность  $N_f^\phi$ .

### 2.3.1.3.6 Модель Лю

К. Лю (1993) предложил модель *виртуальной энергии деформации* (ВЭД), затрагивающую как упругую, так и пластическую деформацию. ВЭД  $\Delta W^\phi$  на плоскости  $\phi$  разделяется на упругую  $\Delta W^{el}$  и пластическую  $\Delta W^{pl}$  части (см. рис. 2.22) [170]:

$$\Delta W^{el} = \Delta\sigma\Delta\varepsilon^{el}, \quad (2.130)$$

$$\Delta W^{pl} \leq \Delta\sigma\Delta\varepsilon^{pl}, \quad (2.131)$$

откуда

$$\Delta W^\phi = \Delta W^{el} + \Delta W^{pl} \approx \Delta\sigma^\phi\Delta\varepsilon^\phi, \quad (2.132)$$

где согласно модели Басквина (2.98)

$$\sigma_a^\phi = \frac{\Delta\sigma^\phi}{2} = \sigma_f' (2N_f)^b \quad (2.133)$$

и согласно модели Басквина – Мэнсона – Коффина (2.113)

$$\varepsilon_a^\phi = \frac{\Delta\varepsilon^\phi}{2} = \frac{\sigma_f'}{E} (2N_f)^b + \varepsilon_f' (2N_f)^c. \quad (2.134)$$

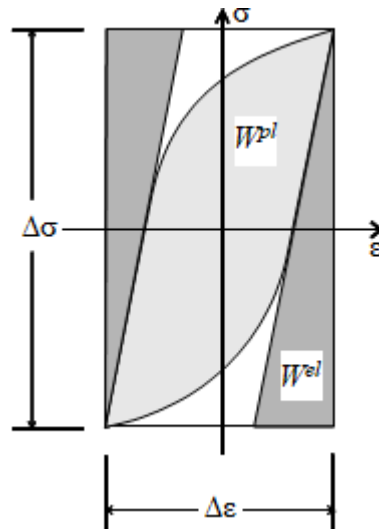


Рис. 2.22 – Энергии упругой и пластической деформации

Подстановка (2.133) и (2.134) в (2.132) даёт

$$\Delta W^\phi \approx \frac{4\sigma_f'^2}{E} (2N_f)^{2b} + 4\sigma_f' \varepsilon_f' (2N_f)^{b+c}. \quad (2.135)$$

При многоосном нагружении в модели ВЭД рассматриваются два механизма разрушения: отрывом (тип I) и сдвигом (тип II). Полагается, что разрушение начинается на той плоскости  $\phi$ , где достигается максимум ВЭД. При разрушении отрывом критической плоскостью является та, на которой достигается максимум энергии растяжения, а при разрушении сдвигом – та, на которой достигается максимум энергии сдвига. Расчётной величиной в обоих случаях является сумма энергий растяжения и сдвига:

$$\Delta W_I = \max_{\phi} \Delta\sigma^\phi \Delta\varepsilon^\phi + \Delta\tau^{\phi_{max}} \Delta\gamma^{\phi_{max}} = \frac{4\sigma_f'^2}{E} (2N_f)^{2b} + 4\sigma_f' \varepsilon_f' (2N_f)^{b+c}, \quad (2.136)$$

$$\Delta W_{II} = \Delta\sigma^{\phi_{max}} \Delta\varepsilon^{\phi_{max}} + \max_{\phi} \Delta\tau^\phi \Delta\gamma^\phi = \frac{4\tau_f'^2}{G} (2N_f)^{2b_\gamma} + 4\tau_f' \gamma_f' (2N_f)^{b_\gamma+c_\gamma}. \quad (2.137)$$

В первом случае коррекция средних напряжений  $\sigma_m$  выполняется с помощью коэффициента асимметрии  $R$ :

$$\Delta W_I = (\max \Delta\sigma \Delta\varepsilon + \Delta\tau \Delta\gamma) \left( \frac{2}{1-R} \right), \quad (2.138)$$

а во втором случае – с помощью дробно-линейной зависимости

$$\Delta W_{II} = (\Delta\sigma \Delta\varepsilon + \max \Delta\tau \Delta\gamma) \left( \frac{\sigma_f'}{\sigma_f' - \sigma_m} \right). \quad (2.139)$$

Из уравнений (2.136) и (2.137) для каждой плоскости  $\phi$  находятся усталостные долговечности  $N_{fI}^\phi$  и  $N_{fII}^\phi$ . Если  $N_{fI}^\phi < N_{fII}^\phi$ , то разрушение происходит отрывом, иначе сдвигом.

### 2.3.1.4 Рекомендации по применению

#### 2.3.1.4.1 Многоцикловая усталость

Рекомендуется использовать модель Басквина (2.98) в расчётах МнЦУ только при отсутствии пластических деформаций ( $\sigma_{max} \leq \sigma_y$  и  $\sigma_{min} \geq -\sigma_y$ ) с любым вариантом коррекции средних напряжений, кроме коррекции Гербера. В коррекции Уолкера (2.105) рекомендуется использовать  $\gamma \geq 1/2$ , а в коррекции Квофи (2.107) –  $\theta \geq 1$ .

#### 2.3.1.4.2 Малоцикловая усталость

В расчётах МаЦУ при наличии пластических деформаций ( $\sigma_{max} > \sigma_y$  или  $\sigma_{min} < -\sigma_y$ ) рекомендуется использовать модель Басквина – Мэнсона – Коффина (2.113) с коррекцией SWT (2.115). В табл. 2.2 приведены медианные значения параметров модели Басквина – Мэнсона – Коффина, полученные М.А. Меггиоларо и Ж.Т.П. Кастро (2004) на основании статистического анализа 724 сталей, 16 чугунов, а также 81 алюминиевого, 15 титановых и 9 никелевых сплавов.

Табл. 2.2 – Медианные значения параметров модели Басквина – Мэнсона – Коффина [171]

Параметр	Сталь	Чугун	Алюминиевый сплав	Титановый сплав	Никелевый сплав
$E$ , ГПа	205	140	71	108	211
$\sigma'_f$	$1,5\sigma_u$	$1,2\sigma_u$	$1,9\sigma_u$	$1,9\sigma_u$	$1,4\sigma_u$
$b$	-0,09	-0,08	-0,11	-0,10	-0,08
$\varepsilon'_f$	0,45	0,04	0,28	0,50	0,15
$c$	-0,59	-0,52	-0,66	-0,69	-0,59

Поскольку модель Басквина – Мэнсона – Коффина требует определения пластических деформаций, необходимо выполнять упруго-пластический расчёт конструкции. При циклическом нагружении помимо эффекта Баушингера (см. рис. 2.8) наблюдается следующее:

- вышагивание (*ratchetting*) петли упруго-пластического гистерезиса при мягком несимметричном циклическом нагружении (см. рис. 2.23а);
- приспособляемость (*shakedown*) петли упруго-пластического гистерезиса при мягком несимметричном циклическом нагружении (см. рис. 2.23б);
- релаксация средних напряжений при жёстком несимметричном циклическом нагружении (см. рис. 2.24а);
- отсутствие релаксации средних напряжений при жёстком несимметричном циклическом нагружении (см. рис. 2.24б);
- циклическое упрочнение (см. рис. 2.25) или разупрочнение (см. рис. 2.26) при симметричном нагружении.

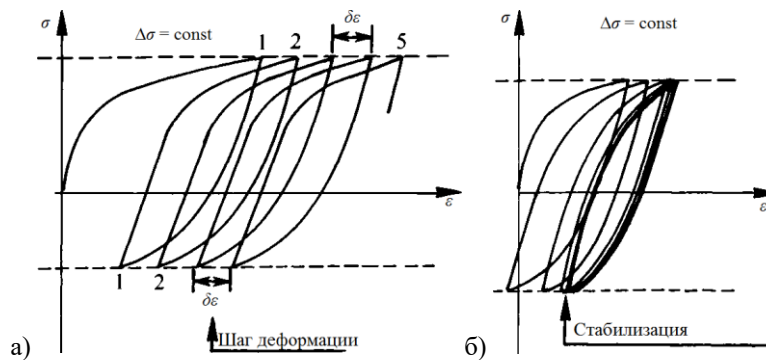


Рис. 2.23 – Эффекты при мягком несимметричном циклическом нагружении [149]: а) вышагивание (*ratchetting*); б) приспособляемость (*shakedown*)

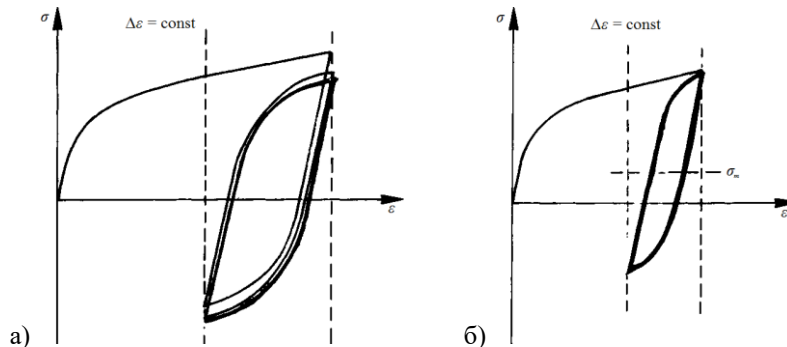


Рис. 2.24 – Эффекты при жёстком несимметричном циклическом нагружении [149]: а) релаксация; б) отсутствие релаксации

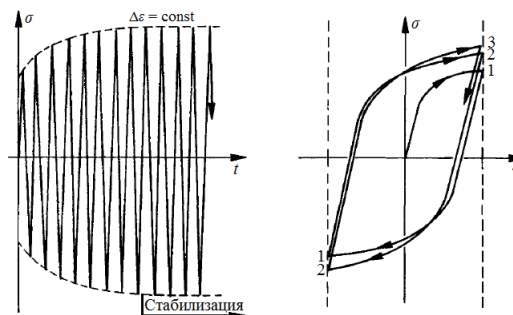


Рис. 2.25 – Циклическое упрочнение при жёстком симметричном нагружении [149]

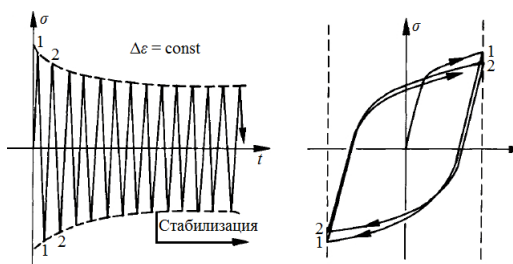


Рис. 2.26 – Циклическое разупрочнение при жёстком симметричном нагружении [149]

Указанные эффекты влияют как на величину амплитуды полной деформации, так и на величину максимального напряжения в цикле нагружения, используемые в параметре SWT. Первые четыре эффекта, возникающие при несимметричном нагружении, способна описать модель Армстронга – Фредерика – Шабоша нелинейного кинематического упрочнения (2.59), а последние два эффекта, возникающие при симметричном нагружении, – модель Войса нелинейного изотропного упрочнения (2.63). Для наиболее точного описания процесса

нагрузки конструкции рекомендуется совместное использование двух указанных моделей.

### 2.3.2 Методы сведения сложного напряжённого состояния к простому

При расчётах усталостной прочности наибольшее распространение получили следующие методы сведения сложного (двуосного или трёхосного) напряжённого состояния к простому (одноосному) [162]:

- метод абсолютных максимальных главных напряжений;
- метод знаковых касательных напряжений;
- метод знаковых эквивалентных напряжений;
- методы Синса (*Sines*) [172] и Кроссленда (*Crossland*) [173];
- метод критической плоскости.

#### 2.3.2.1 Метод абсолютных максимальных главных напряжений

В методе абсолютных максимальных главных напряжений за расчётное напряжение принимается эквивалентное по критерию Галилея – Ренкина главное напряжение (2.38) с учётом его знака [162]:

$$\sigma_{abs}(t) = \begin{cases} \sigma_1(t) & |\sigma_1(t)| \geq |\sigma_3(t)|, \\ \sigma_3(t) & |\sigma_1(t)| < |\sigma_3(t)|, \end{cases} \quad (2.140)$$

где  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  – максимальное и минимальное главные напряжения соответственно ( $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ). Например, если к постоянному чистому сдвигу  $\sigma_1 = -\sigma_3 = \sigma = \text{const}$ ,  $\sigma_2 = 0$  добавить переменную во времени гидростатическую компоненту  $\sigma_h(t) = \sigma \sin(\omega t) \mathbf{1}$ , где  $\mathbf{1}$  – единичный тензор, а  $\omega$  – некоторая круговая частота изменения гидростатического напряжения, то получится следующая реализация абсолютных максимальных главных напряжений (рис. 2.27):

$$\begin{aligned} \sigma_1(t) &= \sigma(1 + \sin(\omega t)), \quad \sigma_3(t) = \sigma(\sin(\omega t) - 1), \\ \sigma_{abs}(t) &= \begin{cases} \sigma_1(t) & \sin(\omega t) \geq 0, \\ \sigma_3(t) & \sin(\omega t) < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.141)$$

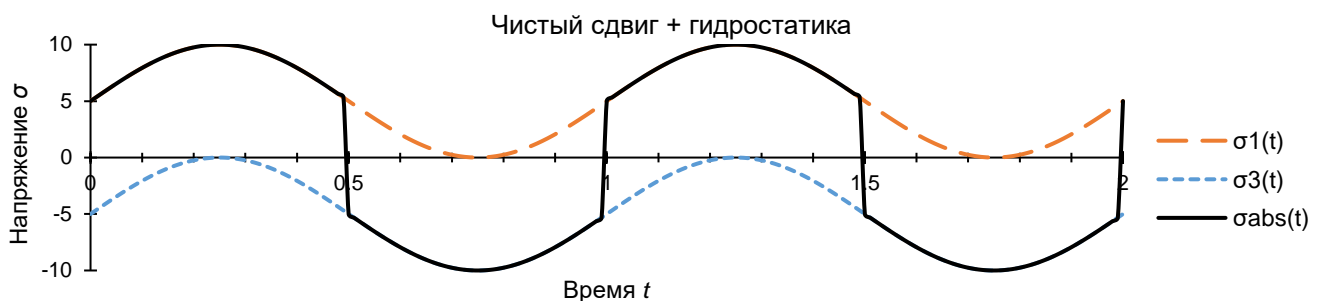


Рис. 2.27 – Реализация абсолютных максимальных главных напряжений для случая суммы постоянного чистого сдвига с синусоидальным гидростатическим напряжением

Из (2.140) следует

$$\sigma_{abs} = 0 \Leftrightarrow |\sigma_1| = |\sigma_3| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \quad (2.142)$$

т.е. абсолютное максимальное главное напряжение в рассматриваемой точке равно нулю тогда и только тогда, когда эта точка (элементарный объём) находится в ненапряжённом состоянии.

### 2.3.2.2 Метод знаковых касательных напряжений

В методе знаковых касательных напряжений за расчётное напряжение принимается эквивалентное по критерию Треска – Сен-Венана касательное напряжение (2.39) с учётом знака [162]:

$$\sigma_{shear}^{sgn}(t) = sign(t) \max\{|\sigma_1(t) - \sigma_2(t)|; |\sigma_2(t) - \sigma_3(t)|; |\sigma_3(t) - \sigma_1(t)|\}, \quad (2.143)$$

где  $sign$  – функция знака, для которой обычно используют два правила [174, 175]:

$$sign = \operatorname{sgn}(\sigma_{abs}), \quad (2.144)$$

$$sign = \operatorname{sgn}(\operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma})) = \operatorname{sgn}(\operatorname{tr}(\mathbf{s} + \mathbf{d})) = \operatorname{sgn}(\operatorname{tr}(\mathbf{s}) + \operatorname{tr}(\mathbf{d})) = \operatorname{sgn}(\operatorname{tr}(\mathbf{d})); \quad (2.145)$$

$\mathbf{d}$  – шаровой тензор.

Учёт знака в (2.143) позволяет этому критерию корректно описывать симметричный цикл одноосного растяжения-сжатия. Из (2.142) и (2.144) вытекает

$$sign = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sgn}(\sigma_{abs}) = 0 \Leftrightarrow \sigma_{abs} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \quad (2.146)$$

а из (2.145) вытекает

$$sign = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sgn}(\operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma})) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \Leftrightarrow \sigma_h = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = 0, \quad (2.147)$$

т.е. в случае принятия знака абсолютных максимальных главных напряжений функция знака  $sign$  обращается в ноль тогда и только тогда, когда тензор напряжений является нулевым, а случае принятия знака гидростатических напряжений функция знака  $sign$  обращается в ноль тогда и только тогда, когда гидростатическое напряжение  $\sigma_h$  равно нулю (как это происходит, например, в случае чистого сдвига). Таким образом, очевидно, что для металлов правило (2.144) гораздо предпочтительнее правила (2.145).

Необходимо отметить, что касательное напряжение в (2.143) нечувствительно к шаровому тензору  $\mathbf{d}$ , т.е. не реагирует на всестороннее растяжение-сжатие.

### 2.3.2.3 Метод знаковых эквивалентных напряжений

В методе знаковых эквивалентных напряжений за расчётное напряжение принимается эквивалентное по критерию Губера – Мизеса – Генки напряжение (2.40) с учётом знака [162]:

$$\sigma_{Mises}^{sgn}(t) = sign(t) \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s}(t) : \mathbf{s}(t)}, \quad (2.148)$$

где  $\mathbf{s}$  – тензор-девиатор. Как и в предыдущем случае, учёт знака в (2.148) позволяет корректно описывать симметричный цикл одноосного растяжения-сжатия.

### 2.3.2.4 Методы Синса и Кроссленда

Заметим, что эквивалентное по Мизесу напряжение нечувствительно к шаровому тензору



d. Подобное обстоятельство исправлено в методах Синса и Кроссленда, которые можно рассматривать как естественное развитие метода эквивалентных по Мизесу напряжений:

$$\sigma_{Sines}(t) = \frac{1}{2}\tau_{oct}(t) + 3\beta\sigma_h(t) = \sqrt{\frac{1}{12}\mathbf{s}(t):\mathbf{s}(t)} + \beta \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}(t)), \quad (2.149)$$

где  $\tau_{oct}$  – касательное напряжение на октаэдрических площадках:

$$\tau_{oct}(t) = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_{eq}(t) = \sqrt{\frac{1}{3}\mathbf{s}(t):\mathbf{s}(t)}; \quad (2.150)$$

$\beta$  – константа материала (чувствительность к гидростатическому напряжению).

Отличие метода Кроссленда от метода Синса (2.149) состоит в использовании наибольшего за цикл гидростатического напряжения  $\sigma_h^{max}$ . Это методы по своей сути близки к теории прочности Друкера – Прагера (2.42).

### 2.3.2.5 Метод критической плоскости

Метод критической плоскости основан на построении реализации расчётного нормального или касательного напряжения путём проецирования компонент тензора напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$  в рассматриваемой точке на всевозможные плоскости, через неё проходящие. Плоскость, на которой достигается наибольшее значение меры  $D$  усталостных повреждений, посчитанной на основе заданной модели усталости, называют *критической плоскостью* или *плоскостью отказа*. Рассмотрение метода критической плоскости удобно производить для точек свободной поверхности конструкции, на которой отсутствуют поверхностные нагрузки. Ориентация каждой плоскости, являющейся кандидатом на роль критической, определяется углом  $\phi$  между её нормалью  $\vec{n}_\phi$  и осью  $Ox$  локальной системы координат (см. рис. 2.28). В таком случае у точек свободной поверхности отсутствуют нормальные и касательные компоненты тензора напряжений, связанные с нормальным направлением к свободной поверхности, и в этих точках напряжённое состояние является плоским (либо одноосным):

$$\sigma_z \equiv 0, \tau_{xz} \equiv 0, \tau_{yz} \equiv 0. \quad (2.151)$$

Вычисление реализации расчётного нормального напряжения  $\sigma_\phi(t)$ , перпендикулярного данной плоскости-кандидату, и реализации расчётного касательного напряжения  $\tau_\phi(t)$ , лежащего в данной плоскости-кандидате, выполняется по следующим формулам соответственно [150, 162, 176]:

$$\sigma_\phi(t) = \vec{n}_\phi \cdot \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot \vec{n}_\phi = \frac{\sigma_x(t) + \sigma_y(t)}{2} + \frac{\sigma_x(t) - \sigma_y(t)}{2} \cos(2\phi) + \tau_{xy}(t) \sin(2\phi), \quad (2.152)$$

$$\tau_\phi(t) = \vec{n}_{\phi+\frac{\pi}{2}} \cdot \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot \vec{n}_\phi = \frac{\sigma_y(t) - \sigma_x(t)}{2} \sin(2\phi) + \tau_{xy}(t) \cos(2\phi), \quad (2.153)$$

где в численных расчётах угол  $\phi$  принимает дискретные значения между  $0^\circ$  и  $180^\circ$  с шагом обычно от  $5^\circ$  до  $10^\circ$ .

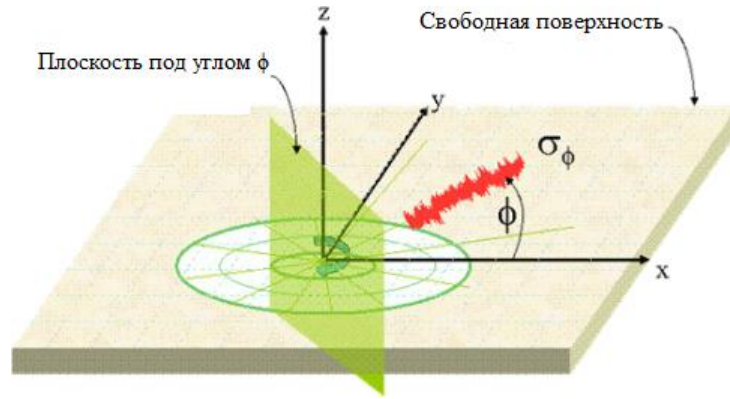


Рис. 2.28 – Расчётное нормальное напряжение в методе критической плоскости [162]

### 2.3.2.6 Расчётное напряжение при плоском напряжённом состоянии

Одной из основных характеристик плоского напряжённого состояния является его коэффициент двуосности  $a$ :

$$a(t) = \frac{\sigma_2(t)}{\sigma_1(t)}, \quad (2.154)$$

где  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  – главные напряжения плоского тензора  $\boldsymbol{\sigma}$  такие, что  $|\sigma_1| \geq |\sigma_2|$ . Отсюда следует, что при  $\sigma_1 \neq 0$  (т.е. при наличии напряжённого состояния)

$$|a| = \left| \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq a \leq 1. \quad (2.155)$$

Легко выделить три основных случая:

- $a = 0$  – одноосное напряжённое состояние;
- $a = 1$  – двуосное растяжение-сжатие;
- $a = -1$  – чистый сдвиг.

Выпишем для случая плоского тензора выражения (2.140), (2.143), (2.148) и (2.149) через коэффициент  $a$  и главное напряжение  $\sigma_1$ , имея в виду правило (2.144) для функции знака (см. рис. 2.29):

$$\sigma_{abs}(t) = \sigma_1(t), \quad (2.156)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{shear}^{sgn}(t) &= \text{sgn}(\sigma_{abs}(t)) \max\{|\sigma_1(t) - \sigma_2(t)|; |\sigma_2(t)|; |\sigma_1(t)|\} = \\ &= \text{sgn}(\sigma_1(t)) |\sigma_1(t)| \max\{|1 - a(t)|; |a(t)|; 1\} = \sigma_1(t) \max\{1 - a(t); 1\}, \end{aligned} \quad (2.157)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{Mises}^{sgn}(t) &= \text{sgn}(\sigma_{abs}(t)) \sqrt{\frac{(\sigma_1(t) - \sigma_2(t))^2 + \sigma_2(t)^2 + \sigma_1(t)^2}{2}} = \\ &= \text{sgn}(\sigma_1(t)) |\sigma_1(t)| \sqrt{1 - a(t) + a(t)^2} = \sigma_1(t) \sqrt{1 - a(t) + a(t)^2}, \end{aligned} \quad (2.158)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{Sines}(t) &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1(t) - \sigma_2(t))^2 + \sigma_2(t)^2 + \sigma_1(t)^2} + \beta(\sigma_1(t) + \sigma_2(t)) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} |\sigma_1(t)| \sqrt{1 - a(t) + a(t)^2} + \beta \sigma_1(t) (1 + a(t)). \end{aligned} \quad (2.159)$$

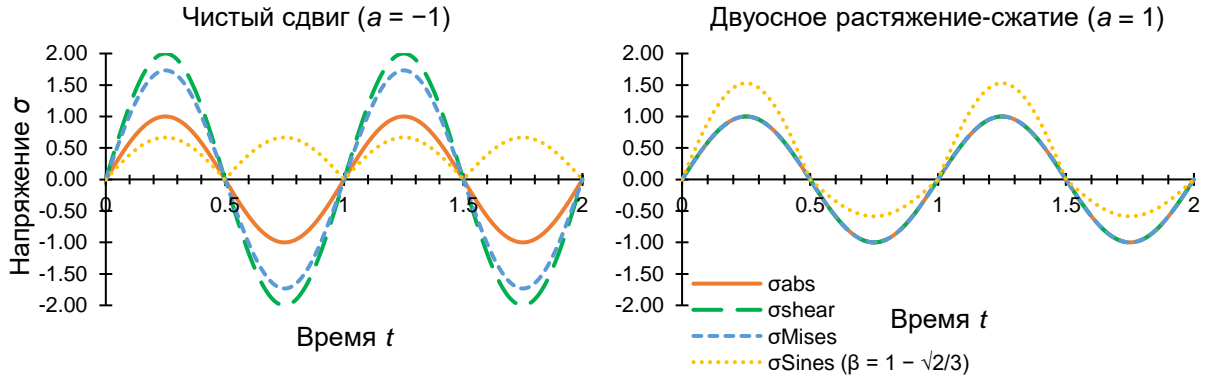


Рис. 2.29 – Реализации абсолютных максимальных главных напряжений, знаковых касательных напряжений, знаковых напряжений Мизеса и напряжений Синса для случаев синусоидального чистого сдвига и синусоидального двусосного растяжения-сжатия

### 2.3.2.7 Пропорциональное нагружение

При пропорциональном нагружении тензор напряжений  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  в каждый момент времени  $t$  пропорционален некоторому ненулевому тензору  $\boldsymbol{\sigma}_0$ :

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = k(t)\boldsymbol{\sigma}_0, \quad \boldsymbol{\sigma}_0 \neq \mathbf{0}, \quad (2.160)$$

где  $k(t)$  – коэффициент пропорциональности. Очевидно, что поворота главных осей тензора  $\boldsymbol{\sigma}$  в этом случае не происходит. Также заметим, что при пропорциональном нагружении коэффициент двусосности  $a$  (2.154) не меняется во времени

$$a(t) \equiv a_0 = \text{const}, \quad (2.161)$$

а траектория нагружения в пространстве напряжений представляет собой отрезок прямой линии, проходящей через начало координат.

Выпишем для рассмотренных выше методов (2.140), (2.143), (2.148), (2.149) и (2.152)–(2.153) получающиеся при условии (2.160) реализации, имея в виду правило (2.144) для функции знака:

$$\sigma_{abs}(t) = \begin{cases} k(t)\sigma_1^0 & |k(t)\sigma_1^0| \geq |k(t)\sigma_3^0| \\ k(t)\sigma_3^0 & |k(t)\sigma_1^0| < |k(t)\sigma_3^0| \end{cases} = k(t) \begin{cases} \sigma_1^0 & |\sigma_1^0| \geq |\sigma_3^0| \\ \sigma_3^0 & |\sigma_1^0| < |\sigma_3^0| \end{cases} = k(t)\sigma_{abs0}, \quad (2.162)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{shear}^{sgn}(t) &= \text{sgn}(\sigma_{abs}(t)) \max\{|k(t)\sigma_1^0 - k(t)\sigma_2^0|; |k(t)\sigma_2^0 - k(t)\sigma_3^0|; |k(t)\sigma_3^0 - k(t)\sigma_1^0|\} = \\ &= \text{sgn}(k(t)\sigma_{abs0}) |k(t)| \max\{|\sigma_1^0 - \sigma_2^0|; |\sigma_2^0 - \sigma_3^0|; |\sigma_3^0 - \sigma_1^0|\} = \\ &= \text{sgn}(k(t)) |k(t)| \text{sgn}(\sigma_{abs0}) \sigma_{shear0} = k(t)\sigma_{shear0}^{sgn}, \end{aligned} \quad (2.163)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{Mises}^{sgn}(t) &= \text{sgn}(\sigma_{abs}(t)) \sqrt{\frac{3}{2}k(t)^2 \mathbf{s}_0 : \mathbf{s}_0} = \text{sgn}(k(t)\sigma_{abs0}) |k(t)| \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s}_0 : \mathbf{s}_0} = \\ &= \text{sgn}(k(t)) |k(t)| \text{sgn}(\sigma_{abs0}) \sigma_{Mises0} = k(t)\sigma_{Mises0}^{sgn}, \end{aligned} \quad (2.164)$$

$$\sigma_{Sines}(t) = \sqrt{\frac{1}{12}k(t)^2 \mathbf{s}_0 : \mathbf{s}_0} + \beta \text{tr}(k(t)\boldsymbol{\sigma}_0) = |k(t)| \sqrt{\frac{1}{12} \mathbf{s}_0 : \mathbf{s}_0} + k(t)\beta \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_0), \quad (2.165)$$

$$\sigma_\phi(t) = \vec{n}_\phi \cdot k(t)\boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \vec{n}_\phi = k(t)(\vec{n}_\phi \cdot \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \vec{n}_\phi) = k(t)\sigma_\phi^0, \quad (2.166)$$

$$\tau_\phi(t) = \vec{n}_{\phi+\frac{\pi}{2}} \cdot k(t)\boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \vec{n}_\phi = k(t) \left( \vec{n}_{\phi+\frac{\pi}{2}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \vec{n}_\phi \right) = k(t)\tau_\phi^0. \quad (2.167)$$

Из (2.166) и (2.167) следует, что при пропорциональном нагружении критическими плоскостями будут такие, на которых достигаются  $\max_{\phi} |\sigma_{\phi}^0|$  и  $\max_{\phi} |\tau_{\phi}^0|$  соответственно. Но очевидно, что

$$\max_{\phi} |\sigma_{\phi}^0| = |\sigma_{abs0}| \text{ и } \phi_{max} \text{ совпадает с направлением } \sigma_{abs0}, \quad (2.168)$$

$$\max_{\phi} |\tau_{\phi}^0| = \frac{\sigma_1^0 - \sigma_3^0}{2} \text{ и } \phi_{max} \text{ расположен под углом } 45^\circ \text{ к напряжениям } \sigma_1^0 \text{ и } \sigma_3^0. \quad (2.169)$$

Необходимо отметить, что для всех методов, кроме метода Синса, при пропорциональном нагружении расчётное напряжение равно произведению коэффициента пропорциональности на константу метода. Для гармонизации метода Синса с остальными методами предлагается следующая модификация, учитывающая знак октаэдрических касательных напряжений:

$$\sigma_{Sines}^{sgn}(t) = \text{sgn}(\sigma_{abs}(t)) \sqrt{\frac{1}{12} \mathbf{s}(t) : \mathbf{s}(t) + \beta \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}(t))}. \quad (2.170)$$

Также видно, что для всех методов, кроме метода Синса, в случае одноосного напряжённого состояния реализации расчётных напряжений совпадают с реализацией главного напряжения. С целью устранения подобного несовпадения в знаковом методе Синса (2.170) для коэффициента  $\beta$  предлагается значение

$$\beta = 1 - \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0,529. \quad (2.171)$$

### 2.3.2.8 Непропорциональное нагружение

При непропорциональном нагружении компоненты тензора напряжений  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  меняются непропорционально друг другу или происходит поворот главных осей тензора в материальной системе координат. Рассмотрение непропорционального нагружения удобно производить на точках свободной поверхности, находящихся в условиях плоского напряжённого состояния.

Имеющемуся плоскому тензору напряжений  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  поставим в соответствие вектор напряжений  $\vec{\sigma}(t)$  по следующему правилу [162]:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (t) \mapsto \left\{ \begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{matrix} \right\} (t) = \vec{\sigma}(t). \quad (2.172)$$

В процессе нагружения годограф вектора  $\vec{\sigma}(t)$  опишет некоторую траекторию в пространстве напряжений. При использовании МКЭ данная траектория представляет собой облако расчётных точек  $\{\vec{\sigma}_k = \vec{\sigma}(t_k) | k = 1, 2, \dots\}$  (см. рис. 2.30). Для указанного облака можно найти главные моменты инерции  $I_1 \geq I_2 \geq I_3$  и соответствующие им главные оси инерции  $i_1, i_2$  и  $i_3$  [162, 177]. Тогда коэффициент непропорциональности нагружения  $K_{NP}$  определим по формуле [162]

$$K_{NP} = \sqrt{\frac{I_3}{I_1} + \left(\frac{H}{S_{max}}\right)^2}, \quad (2.173)$$

где  $H$  – расстояние от начала координат до оси  $i_3$ ;

$S_{max}$  – расстояние от начала координат до наиболее удалённой точки:

$$S_{max} = \max_k |\vec{\sigma}_k|. \quad (2.174)$$

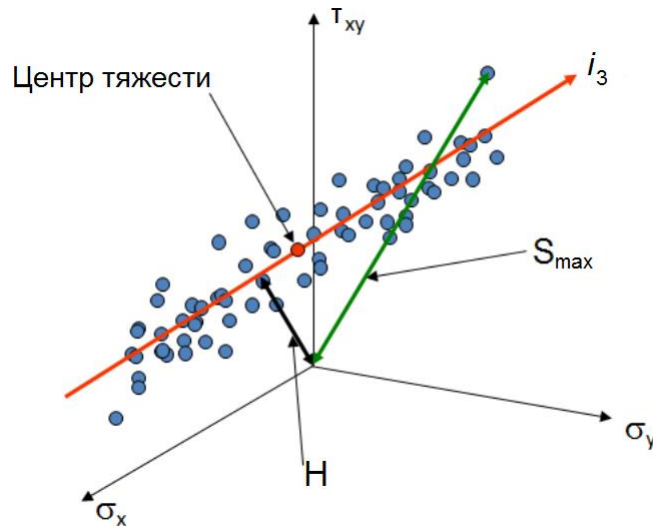


Рис. 2.30 – Облако расчётных точек нагружения в пространстве напряжений  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$  и его главная ось инерции  $i_3$ , соответствующая наименьшему главному моменту инерции  $I_3$  [162]

Ось инерции  $i_3$  имеет в пространстве напряжений направляющий вектор  $\vec{i}_3$ , которому можно поставить в соответствие тензор напряжений  $\sigma$  по правилу, обратному к (2.172):

$$\vec{i}_3 = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \sigma. \quad (2.175)$$

В случае плоского напряжённого состояния тензор  $\sigma$  имеет два главных напряжения  $|\sigma_1| \geq |\sigma_2|$ , по которым можно вычислить средний за историю нагружения коэффициент  $\bar{a}$  двуосности напряжённого состояния. При этом ориентация  $\phi$  наиболее критической плоскости совпадает с ориентацией главного напряжения  $\sigma_1$  полученного тензора  $\sigma$  (2.175).

Если момент инерции  $I_3$  равен нулю, то все расчётные точки лежат на прямой  $i_3$ , при этом

$$K_{NP} = \frac{H}{S_{max}}. \quad (2.176)$$

В таком случае траекторию нагружения можно описать уравнением

$$\vec{\sigma}(t) = \vec{\sigma}_0 + k(t)\vec{i}_3, \quad (2.177)$$

а расстояние  $H$  вычислить по известной формуле

$$H = \frac{|\vec{\sigma}_0 \times \vec{i}_3|}{|\vec{i}_3|}. \quad (2.178)$$

Из (2.178) видно, что  $H$  равно нулю тогда и только тогда, когда либо векторы  $\vec{\sigma}_0$  и  $\vec{i}_3$  сонаправлены, либо вектор  $\vec{\sigma}_0$  является нулевым (вектор  $\vec{i}_3$  ненулевой по условию). В обоих случаях это означает, что прямая  $i_3$  проходит через начало координат и нагружение является пропорциональным.

Различные экспериментальные исследования [178-188] показывают, что непропорциональное нагружение существенно снижает остаточный ресурс конструкций, а

оценки усталостной прочности, полученные при непропорциональном нагружении с использованием приведенных выше методов, кроме метода критической плоскости, носят заметно неконсервативный характер [189].

Рассмотрим простейший вариант непропорционального нагружения – аффинное, которое является естественным расширением пропорционального:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = k(t)\boldsymbol{\sigma}_0 + \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\sigma}_0 \neq \mathbf{0}, \quad (2.179)$$

где  $\boldsymbol{\zeta} \neq \mathbf{0}$  – некоторый ненулевой тензор, который можно рассматривать как тензор начальных (технологических) напряжений. В этом случае траектория нагружения в пространстве напряжений представляет собой отрезок прямой, уже не проходящей через начало координат, а в методе критической плоскости как для нормального, так и для касательного напряжения появляется аддитивная добавка, которая определяет изменение среднего в цикле напряжения:

$$\sigma_{\phi}(t) = \vec{n}_{\phi} \cdot (k(t)\boldsymbol{\sigma}_0 + \boldsymbol{\zeta}) \cdot \vec{n}_{\phi} = k(t)(\vec{n}_{\phi} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \vec{n}_{\phi}) + \vec{n}_{\phi} \cdot \boldsymbol{\zeta} \cdot \vec{n}_{\phi} = k(t)\sigma_{\phi}^0 + \sigma_{\phi}^{\zeta}, \quad (2.180)$$

$$\tau_{\phi}(t) = \vec{n}_{\phi+\frac{\pi}{2}} \cdot (k(t)\boldsymbol{\sigma}_0 + \boldsymbol{\zeta}) \cdot \vec{n}_{\phi} = k(t)(\vec{n}_{\phi+\frac{\pi}{2}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \vec{n}_{\phi}) + \vec{n}_{\phi+\frac{\pi}{2}} \cdot \boldsymbol{\zeta} \cdot \vec{n}_{\phi} = k(t)\tau_{\phi}^0 + \tau_{\phi}^{\zeta}. \quad (2.181)$$

Необходимо отметить, что если тензор  $\boldsymbol{\zeta}$  является шаровым тензором всестороннего растяжения-сжатия, то ни эквивалентные по критерию Треска – Сен-Венана, ни эквивалентные по критерию Губера – Мизеса – Генки напряжения не изменят своих значений.

### 2.3.2.9 Рекомендации по применению

Полученные результаты [6, 7, 8] позволяют говорить о том, что пропорциональное нагружение по своей сути близко к одноосному растяжению-сжатию, а выбор метода должен быть обусловлен конкретными усталостными свойствами материала. Для материалов, чувствительных к гидростатическому напряжению, рекомендуется использование модифицированного метода Синса (2.170).

В случае непропорционального нагружения при низкой степени непропорциональности ( $0 < K_{NP} \leq 0,1$ ):

- оценки методом абсолютных максимальных главных напряжений носят консервативный характер, и данный метод может быть рекомендован к применению;
- оценки методом знаковых касательных напряжений носят сверхконсервативный характер;
- оценки методом знаковых эквивалентных напряжений носят неконсервативный характер, и данный метод необходимо использовать с осторожностью.

При средней степени непропорциональности ( $0,1 < K_{NP} < 0,2$ ) все методы по сравнению с методом критической плоскости имеют значительную дисперсию своих оценок, однако метод знаковых касательных напряжений в среднем даёт консервативные оценки. При высокой степени непропорциональности ( $K_{NP} \geq 0,2$ ) все методы по сравнению с методом критической плоскости имеют существенную недооценку меры накопленных усталостных повреждений, поэтому в этом

случае не могут быть рекомендованы к применению.

В целом, метод критической плоскости является универсальным инструментом, подходящим для использования как при пропорциональном, так и при непропорциональном нагружении. Данный метод рекомендуется к применению в первую очередь.

### 2.3.3 Мера накопленных усталостных повреждений

Полученные реализации расчётных напряжений или деформаций используются для определения меры  $D$  накопленных усталостных повреждений. При использовании той или иной модели усталостного разрушения из реализации расчётной величины необходимо выделить отдельные элементарные циклы (или полуциклы) нагружения (см. рис. 2.31). Стандартным инструментом для этого является *метод дождя* [162, 190]. После выделения из реализации всех элементарных циклов нагружения для каждого из них находится величина усталостной долговечности согласно применяемой модели усталостной прочности. Например, для силовой модели Басквина (2.98) имеем

$$(N_f)_i = \left( \frac{\Delta\sigma_i}{\sigma_f'} \right)^{\frac{1}{b}}, \quad (2.182)$$

где  $i$  – номер элементарного цикла нагружения, выделенного из общей реализации;

$\Delta\sigma_i$  – размах расчётных напряжений на  $i$ -м элементарном цикле нагружения;

$(N_f)_i$  – усталостная долговечность, соответствующая  $i$ -му элементарному циклу нагружения.

Для деформационной модели Басквина – Мэнсона – Коффина с коррекцией Смита – Уотсона – Топпера усталостная долговечность определяется путём решения нелинейного уравнения (2.115).

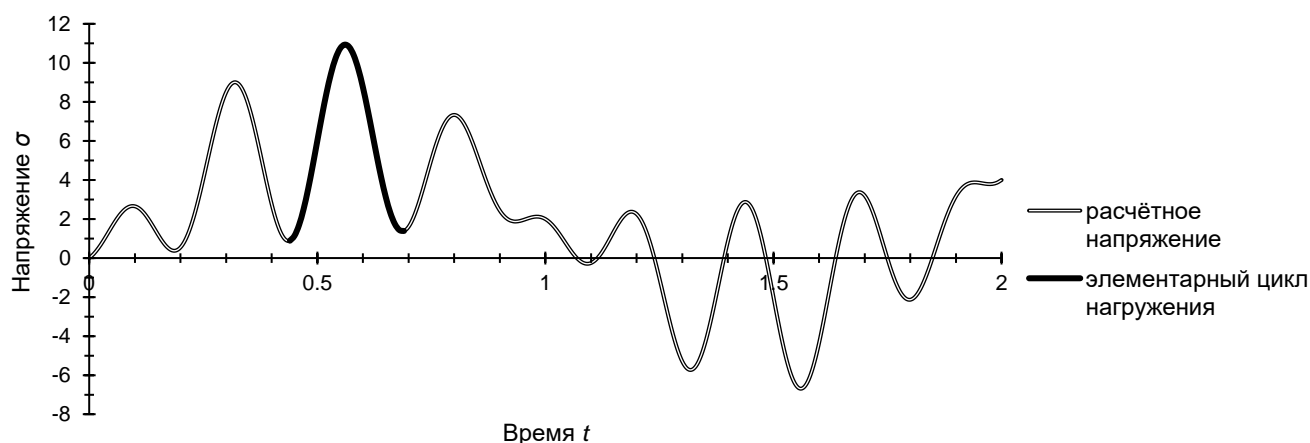


Рис. 2.31 – Пример реализации расчётного напряжения с выделенным элементарным циклом нагружения

По найденным значениям усталостной долговечности  $(N_f)_i$  определяется мера  $D$  накопленных усталостных повреждений с использованием линейного правила суммирования Пальмгрена – Майнера:

$$D = \sum_i \frac{1}{(N_f)_i}. \quad (2.183)$$

Достижение мерой  $D$  единицы соответствует усталостному разрушению конструкции.

В моделях критической плоскости реализации расчётных напряжений строятся сразу для набора плоскостей, после чего для каждой из них определяется мера накопленных усталостных повреждений. Плоскость с максимальной мерой считается критической.

### 2.3.4 Разработка метода проверки усталостной прочности

Проверка усталостной прочности конструкции делится на проверку многоциклового и малоциклового усталости.

#### 2.3.4.1 Алгоритм расчёта многоциклового усталости

Сначала жизненный цикл конструкции разделяется на этапы (см. рис. 2.32), каждому из которых приписывается либо его продолжительность  $P_i$ , либо максимально допустимая мера повреждений  $\Delta_i$ , где  $i$  – номер этапа. Далее на каждом этапе выделяются расчётные случаи, характеризующиеся сочетанием действующих на конструкцию нагрузок. Для каждого расчётного случая задаются реализация вектора нагрузок  $\{F_j(t)\}$  и вероятность его появления  $p_j$ , где  $j$  – номер расчётного случая. Обычно предполагается периодичность действия нагрузок, что соответствует действию  $\{F_j(t)\}$  на некотором периоде  $T_j$ , отвечающем характерной частоте  $\nu_j = 1/T_j$  этой нагрузки. В результате упругого расчёта конструкции на действие  $\{F_j(t)\}$  в ней определяются реализации полей напряжений  $\sigma(t)$  и деформаций  $\varepsilon(t)$ , по которым в соответствии с п.2.3.2 формируются реализации расчётных величин. Далее в соответствии с п.2.3.3 для каждого расчётного случая находится мера  $D_j$  накопленных усталостных повреждений, после чего вычисляется скорость  $d_j$  накопления усталостных повреждений:

$$d_j = \frac{D_j}{T_j} = \nu_j D_j. \quad (2.184)$$

По найденным скоростям  $d_j$  с учётом вероятности их появления  $p_j$  вычисляется средняя на этапе  $i$  скорость  $\bar{d}^i$  накопления усталостных повреждений:

$$\bar{d}^i = E d = \sum_{j=1}^M p_j d_j = \sum_{j=1}^M p_j \nu_j D_j. \quad (2.185)$$

Последним шагом является проверка ресурса конструкции. Если изначально для рассматриваемого этапа  $i$  была задана максимально допустимая на нём мера повреждений  $\Delta_i$ , то вычисляется оценка  $\hat{P}_i$  ресурса конструкции на этом этапе

$$\hat{P}_i = \frac{\Delta_i}{\bar{d}^i}, \quad (2.186)$$

которая должна быть не меньше проектной величины  $P_i$ :



$$\hat{P}_i \geq P_i. \tag{2.187}$$

Если же изначально для рассматриваемого этапа  $i$  была задана его продолжительность  $P_i$ , то вычисляется оценка  $\hat{\Delta}_i$  меры накопленных на этом этапе усталостных повреждений

$$\hat{\Delta}_i = P_i \bar{d}^i, \tag{2.188}$$

которая в сумме с мерами накопленных повреждений на остальных этапах не должна превышать единицы:

$$\sum_{i=1}^N \hat{\Delta}_i \leq 1, \tag{2.189}$$

где  $\hat{\Delta}_i$  вычисляется по формуле (2.188), если для этапа  $i$  была задана продолжительность, либо  $\hat{\Delta}_i = \Delta_i$ , если для этапа  $i$  была задана максимально допустимая мера повреждений.

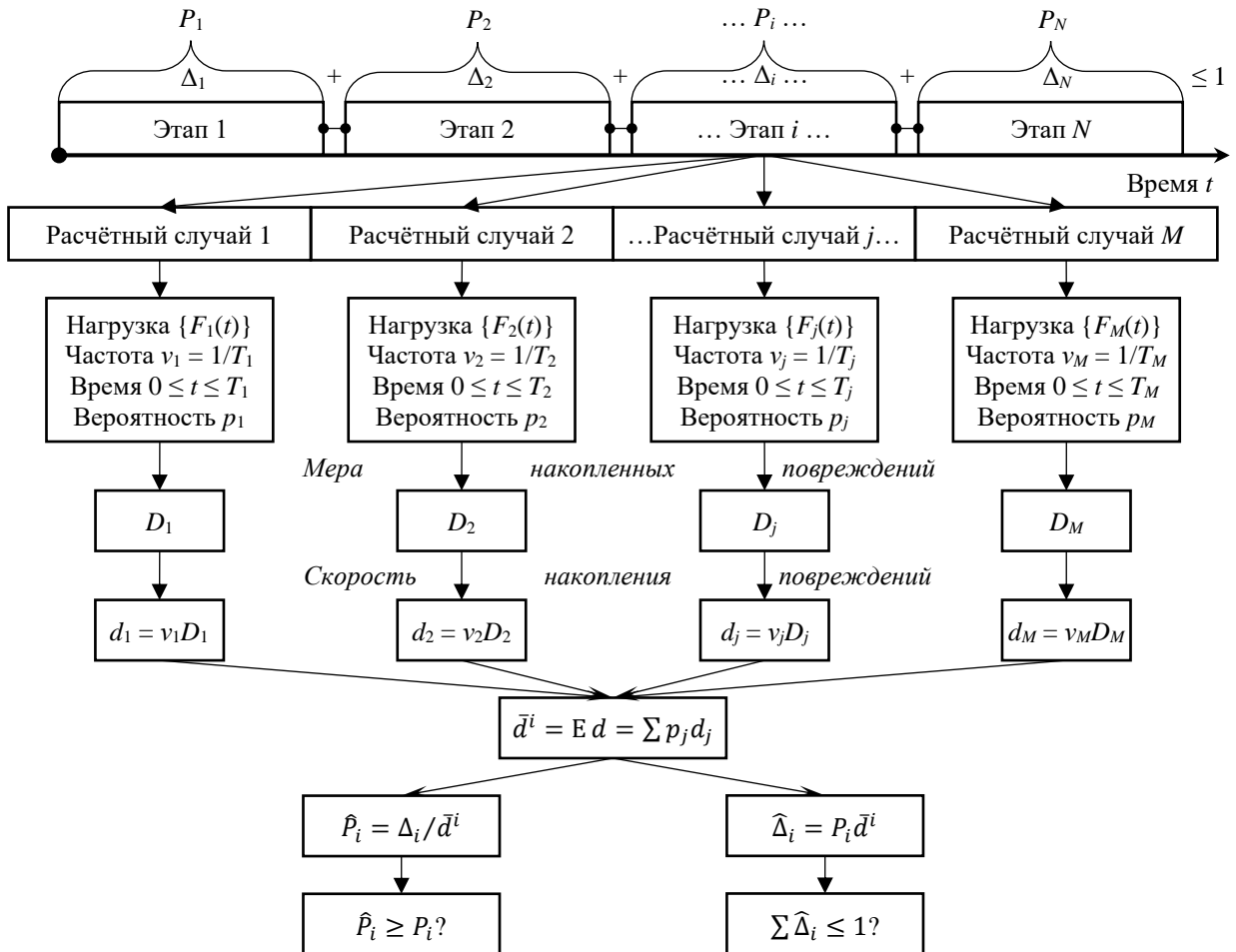


Рис. 2.32 – Схема разработанного алгоритма проверки многоциклового усталости

### 2.3.4.2 Алгоритм расчёта малоциклового усталости

Малоцикловую усталость конструкции обычно вызывают экстремальные нагрузки, на неё действующие. Разработанный алгоритм проверки МаЦУ (см. рис. 2.33) в целом схож с алгоритмом проверки МнЦУ, однако точность получаемых оценок очень сильно зависит от точности выполняемых упруго-пластических расчётов, рекомендации по которым даны в

п.2.3.1.4.2. Сначала необходимо, как и в случае с МнЦУ, сформировать расчётные случаи, включающие в себя различные сочетания экстремальных нагрузок. Для каждого расчётного случая реализация экстремальных нагрузок  $\{F_j^{ex}(t)\}$  характеризуется вероятностью появления  $p_j$  и частотой действия  $v_j$  (или периодом действия  $T_j = 1/v_j$ ), где  $j$  – номер расчётного случая.

При выполнении упруго-пластических расчётов необходимо прикладывать циклы нагружения до тех пор, пока не произойдёт стабилизация петли упруго-пластического гистерезиса:

$$0 \leq t \leq N_j T_j, \quad (2.190)$$

при этом число рассчитываемых циклов нагружения  $N_j$  должно быть не менее 10. В некоторых случаях, когда процесс нагружения носит очень сложный характер или материал является циклически нестабильным, число рассчитываемых циклов нагружения  $N_j$  может достигать 100 и более. Поскольку образование пластических деформаций носит локальный характер и чаще всего происходит в узлах конструкции при наличии концентраторов напряжений, в упруго-пластических расчётах МаЦУ рекомендуется использовать метод подмоделирования, описанный в п.2.1.5.

После выполнения упруго-пластических расчётов вся история нагружения делится на два этапа:

- начальный этап I неустановившегося (нестабильного) нагружения при  $0 \leq t \leq (N_j - 1)T_j$ ;
- конечный этап II установившегося нагружения при  $t \geq (N_j - 1)T_j$ , характеризующийся стабилизированной петлёй упруго-пластического гистерезиса, полученной на последнем рассчитанном цикле нагружения  $N_j$ .

Мера  $D_j$  накопленных усталостных повреждений вычисляется для каждого этапа отдельно, после чего находится ресурс  $P_j$ , соответствующий этим этапам. Для оценки меры  $D_j^I$  на начальном этапе используются вычисленные реализации расчётных напряжений и деформаций при  $0 \leq t \leq (N_j - 1)T_j$ , чему соответствует часть  $P_j^I$  ресурса:

$$P_j^I = (N_j - 1)T_j. \quad (2.191)$$

Для оценки меры  $D_j^{II}$  на конечном этапе используется установившаяся петля упруго-пластического гистерезиса, т.е. реализации расчётных напряжений и деформаций на последнем рассчитанном цикле нагружения при  $(N_j - 1)T_j \leq t \leq N_j T_j$ . Оставшаяся часть  $P_j^{II}$  ресурса определяется по формуле:

$$P_j^{II} = \frac{1 - D_j^I}{D_j^{II}} T_j. \quad (2.192)$$

Расчётным ресурсом  $P_j$  для текущего случая нагружения является сумма двух найденных частей:

$$P_j = P_j^I + P_j^{II} = \left( N_j + \frac{1-D_j^I - D_j^{II}}{D_j^{II}} \right) T_j. \quad (2.193)$$

По найденным расчётным величинам ресурсов вычисляется оценка ресурса конструкции, являющаяся его математическим ожиданием:

$$\bar{P} = E P = \sum_{j=1}^M p_j P_j, \quad (2.194)$$

которая должна быть не меньше величины проектного ресурса.

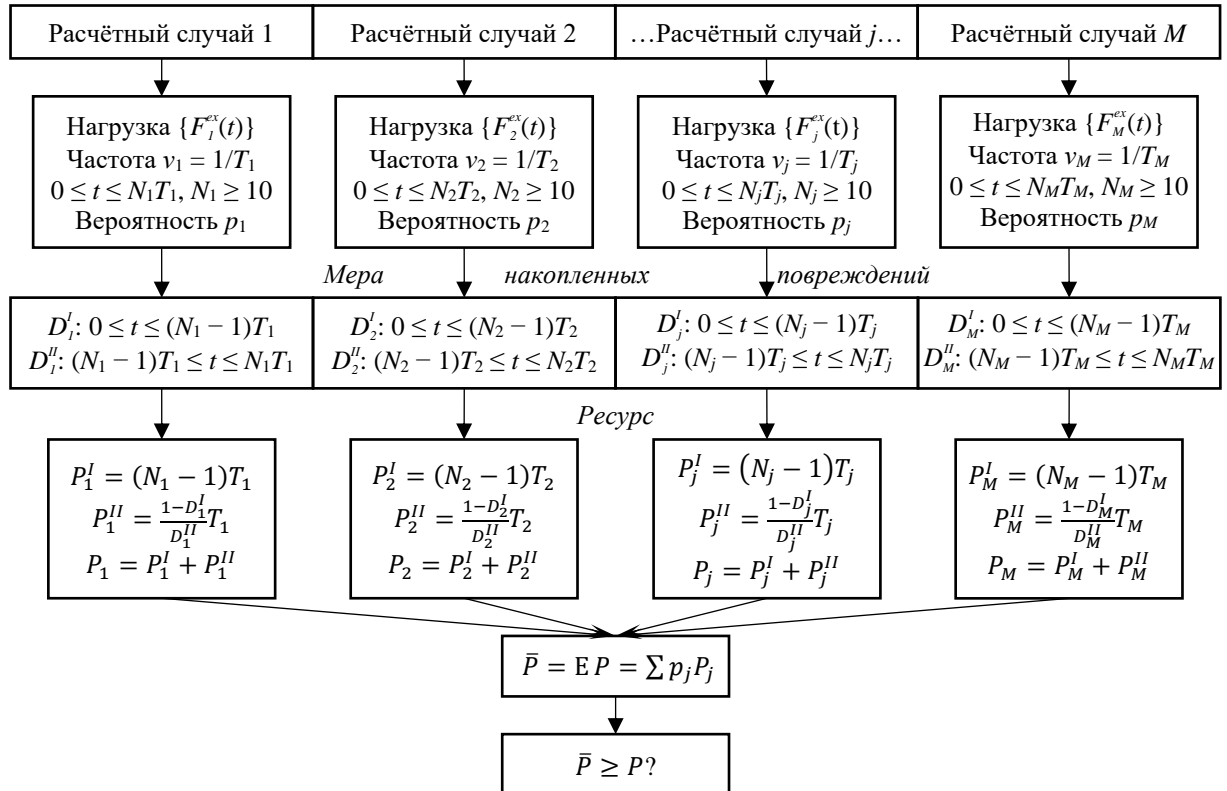


Рис. 2.33 – Схема разработанного алгоритма проверки малоциклового усталости

### 3 АПРОБАЦИЯ РАЗРАБОТАННОГО МЕТОДА ПРОЕКТИРОВАНИЯ СУДОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

#### 3.1 Оптимизация узла стыкового соединения алюминиевых панелей в составе корпуса высокоскоростного судна

К узлам высокоскоростных судов (ВСС), изготавливаемым преимущественно из алюминиевых сплавов, предъявляются высокие требования по надёжности (а, следовательно, по мало- и многоцикловой усталости), малой материалоёмкости и технологичности. Вопросы конструктивного оформления узлов регламентируются требованиями классификационных обществ (например, Правилами РМРС [191]), нормативными документами конструкторских бюро и являются предметом рекомендаций известных специалистов [192]. При этом нормативные требования и рекомендации в подавляющем большинстве случаев обосновываются положительным опытом эксплуатации конструкций, содержащих такие узлы, а детальные теоретические и экспериментальные исследования, как правило, отсутствуют. Для ликвидации этого пробела выполнена апробация предложенного в параграфе 1.3 алгоритма на примере традиционного узла соединения рёбер жёсткости панелей, показанного на рис. 3.1. В этом узле стыкового сварного соединения Правилами рекомендуется для подкрепления использовать элемент таврового профиля, который приваривается сверху на полку ребра симметрично относительно плоскости стыка. Подкрепляющий элемент (ПЭ) на концах имеет сбег «на ус», а высота кончика определяется по условию приварки ПЭ. Этот элемент призван снизить уровень напряжений в стыке панелей, поскольку прочностные свойства алюминиевых сплавов падают в сварном шве, точнее в зоне термического влияния (ЗТВ). Кроме того, в стенках рёбер жёсткости имеется отверстие для прохода сварного шва, создающее концентратор напряжений. Однако подобная установка ПЭ, очевидно, вносит в узел дополнительный концентратор напряжений, находящийся на его кончике (даже с учётом наличия гладких сварных швов). Поэтому возникает вопрос о целесообразности установки такого элемента, поскольку для стыкового сварного соединения алюминиевых панелей эффективный коэффициент концентрации напряжений в сварном шве при действии растягивающих панели усилий находится в диапазоне 1,3–1,5. Если коэффициент концентрации напряжений на кончике ПЭ окажется 1,5 или более, то для показанного узла, у которого разрушающими являются усталостные нагрузки, приведенная рекомендация по установке ПЭ является не просто бесполезной, а даже вредной.

Необходимо отметить, что описанное подкрепление эксплуатируется в составе судового корпуса в различных условиях. При расположении его в средней части корпуса соединяемое ребро жёсткости или панель, как правило, находятся в условиях растяжения-сжатия. Расположение подкрепляемого элемента в носовой или кормовой оконечностях влечёт за собой

его работу в условиях изгиба, при этом напряжения в зоне подкрепления являются растягивающими, поскольку нагрузки действуют со стороны наружной обшивки судна.

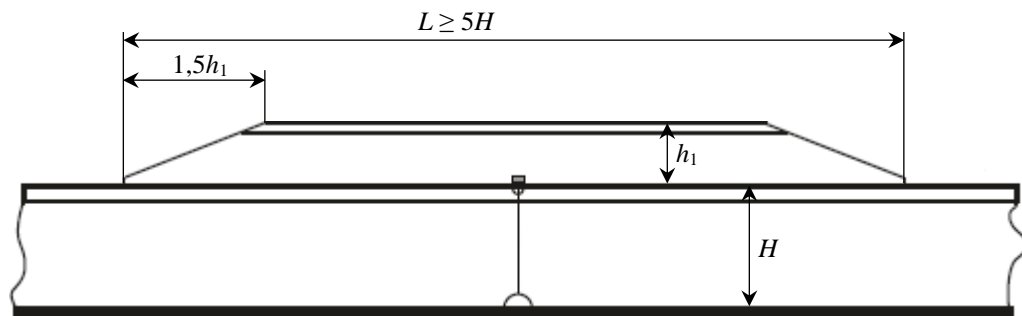


Рис. 3.1 – Подкрепление высоконагруженного стыкового соединения панелей [192]:  $h_1$  минимальный по условию приварки подкрепляющего элемента

### 3.1.1 Оценка эффективности рекомендуемого Правилами узла

Для оценки эффективности рекомендуемого Правилами РМРС узла с применением объёмных элементов второго порядка типа **SOLID186** была построена КЭ модель стыкового сварного соединения алюминиевых панелей ПК0265 [193], имеющих выточки на стыке, который усилен ПЭ в виде полосульба 700373 [194], содержащего на кончиках сварные швы (рис. 3.2). Рассматривается конструкция панелей в пределах шпации (200 мм), общая длина панелей составляет 1 м. В качестве конструкционного материала используется алюминиевый сплав 1561, свойства которого приведены в табл. 3.1.

Оценка коэффициента концентрации напряжений в выточках при отсутствии их подкрепления производилась как на действие растягивающего панели напряжения (рис. 3.3а), так и на действие изгибающего давления (рис. 3.4а). В первом случае равномерное растягивающее напряжение 100 МПа было приложено по торцам панелей как к наружной обшивке, так и к рёбрам жёсткости. Во втором случае равномерное давление 100 кПа, вызывающее изгиб рёбер, было приложено по нормали к наружной обшивке. Результаты линейного статического расчёта показали, что коэффициент концентрации напряжений в выточках составляет 1,33–1,34 (см. рис. 3.3б,в и рис. 3.4б,в), что соответствует экспериментальным данным.

С целью определения коэффициента концентрации напряжений в сварном шве на кончике ПЭ было вычислено НДС рекомендуемого Правилами узла в упругой области как на действие растягивающей (рис. 3.5), так и на действие изгибающей панель нагрузки (рис. 3.6). В первом случае коэффициент концентрации напряжений в сварном шве составил 3,44, а во втором – 4,58. Однако уровень напряжений в выточках на стыке панелей оказался меньше, чем номинальные напряжения в пояске ребра вне подкрепления. Таким образом, рекомендуемый Правилами подкрепляющий элемент, хотя и понижает уровень напряжений в стыке панелей, сам по себе является даже более опасным источником концентрации напряжений, что негативно влияет на многоцикловую усталостную прочность узла (табл. 3.2).

Для оценки влияния рекомендуемого Правилами РМРС подкрепляющего элемента на уровень разрушающей малоциклового нагрузки были выполнены расчёты стыкового соединения панелей в упруго-пластической области с использованием линейной кинематической модели упрочнения до достижения накопленными пластическими деформациями величины 2 % от действия как растягивающей, так и изгибающей нагрузки. Результаты расчётов без ПЭ показаны на рис. 3.7, а с ПЭ – на рис. 3.8. В табл. 3.3 представлены значения нагрузок, вызывающих появление пластической деформации 2 %. Как видно, использование ПЭ, рекомендованного Правилами РМРС, снижает разрушающую растягивающую нагрузку на 13,2 %, а изгибающую – на 4,6 %.

Табл. 3.1 – Механические свойства алюминиевого сплава 1561

Параметр	Значение
Модуль Юнга $E$ , МПа	71000
Коэффициент Пуассона $\nu$	0,33
Плотность $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	2650
Предел текучести $\sigma_y$ , МПа	185
Предел прочности $\sigma_u$ , МПа	335
Относительное удлинение образца при разрыве $\delta_c$ , %	11
Относительное сужение образца при разрыве $\psi_c$ , %	20,7
Касательный модуль $E_T$ , МПа	2331

Табл. 3.2 – Коэффициент  $K_\sigma$  концентрации напряжений в линейной упругой статической задаче

Расчётный случай	Стык панелей без подкрепления	Сварной шов на кончике ПЭ, рекомендованного Правилами РМРС
Растяжение напряжением 100 МПа	1,33	3,44
Изгиб давлением 100 кПа	1,34	4,58

Табл. 3.3 – Нагрузка, вызывающая появление накопленной пластической деформации 2 %

Расчётный случай	Стык панелей без подкрепления	Стык панелей с рекомендованным Правилами РМРС подкреплением
Растяжение напряжением $\sigma$ , МПа	242	210
Изгиб давлением $P$ , кПа	119,5	114,0

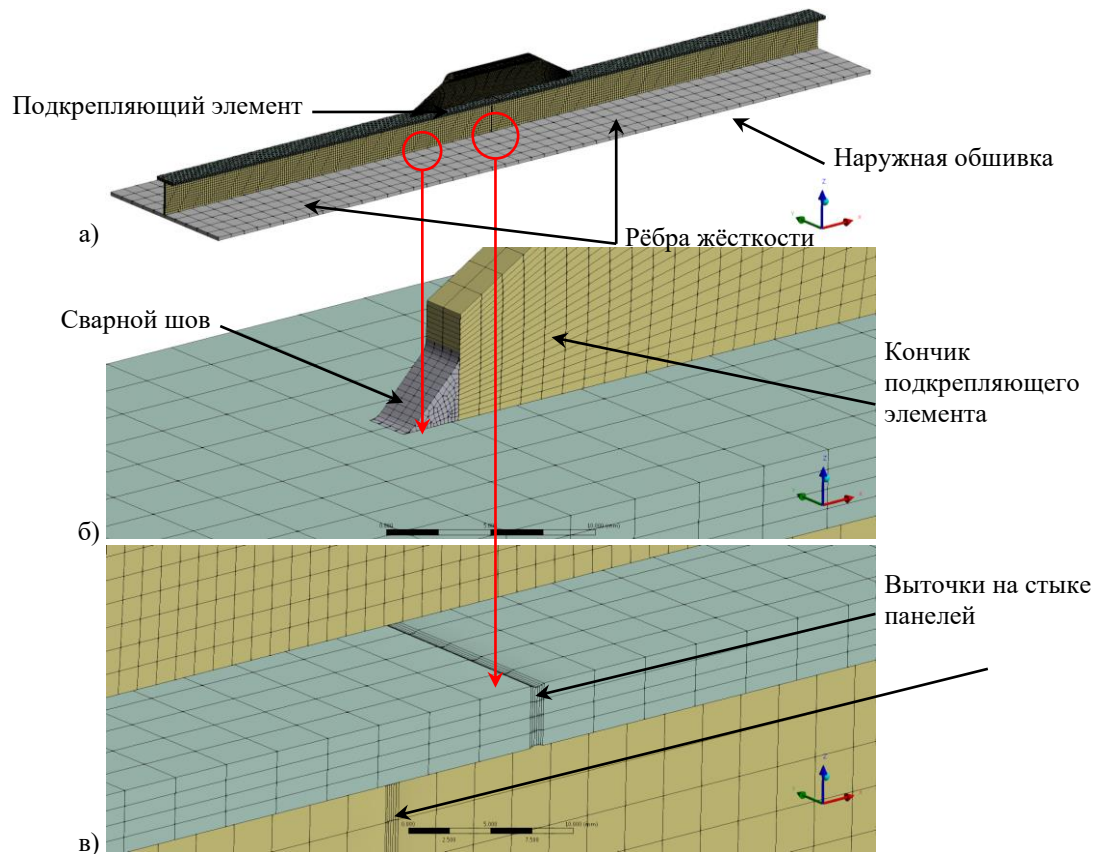


Рис. 3.2 – КЭ модель стыкового сварного соединения панелей с ПЭ, рекомендованном Правилами РМРС (вместо конформной сетки используется склейка элементов): а) общий вид; б) сварные швы на кончике ПЭ; в) выточки на стыке панелей, моделирующие концентрацию напряжений сварного шва

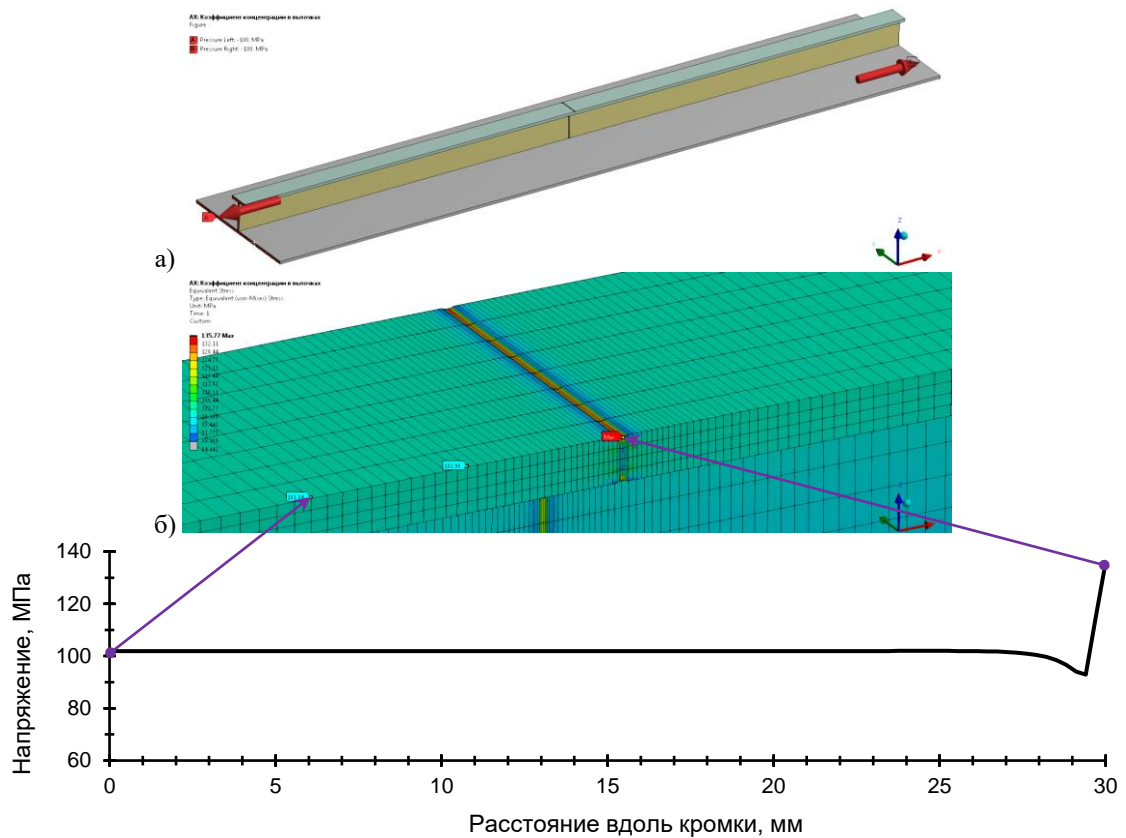
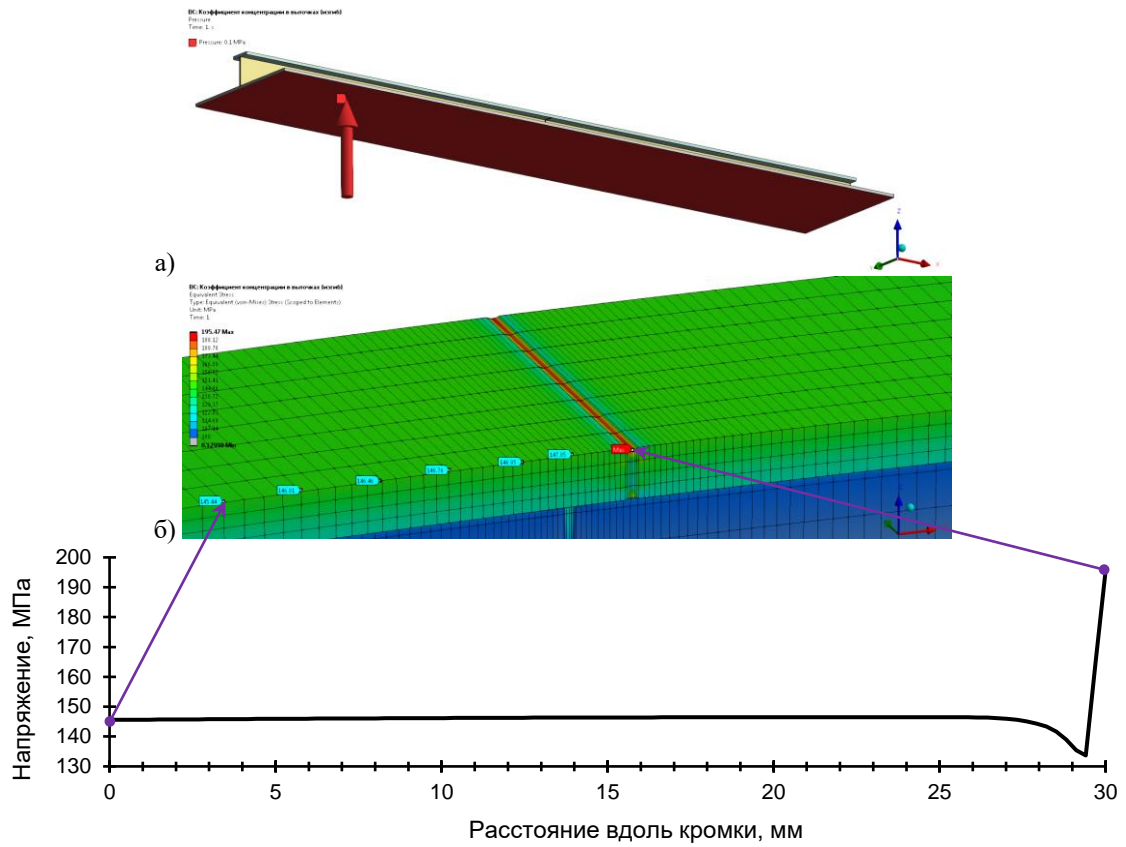
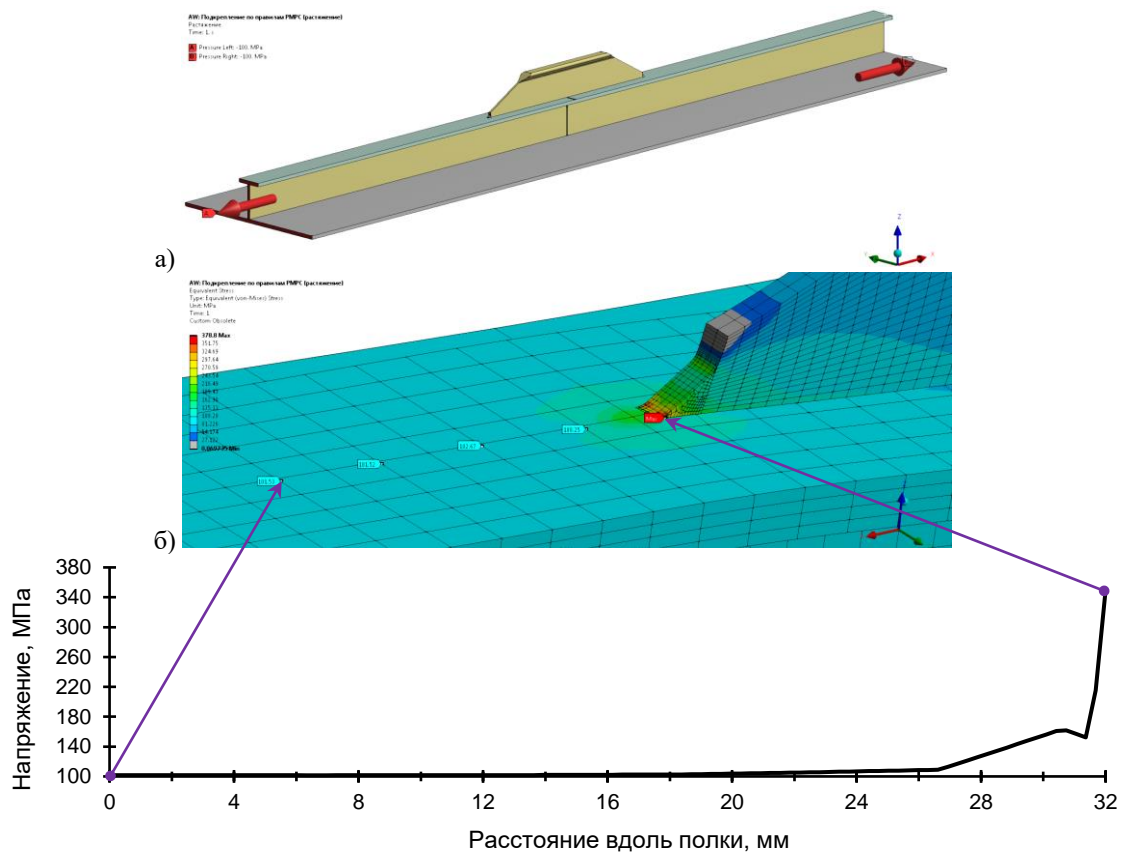


Рис. 3.3 – Определение концентрации напряжений в выточках, моделирующих сварной шов, при растяжении панелей напряжением (без наличия ПЭ): а) постановка задачи; б) поле напряжений в зоне стыка панелей; в) распределение напряжений вдоль верхней кромки полки ребра



в) Рис. 3.4 – Определение концентрации напряжений в выточках, моделирующих сварной шов, при изгибе панелей давлением (без наличия ПЭ): а) постановка задачи; б) поле напряжений в зоне стыка панелей; в) распределение напряжений вдоль верхней кромки полки ребра



в) Рис. 3.5 – Определение концентрации напряжений в сварном шве на кончике ПЭ при растяжении панелей напряжением: а) постановка задачи; б) поле напряжений около сварного шва; в) распределение напряжений вдоль верхней плоскости полки ребра



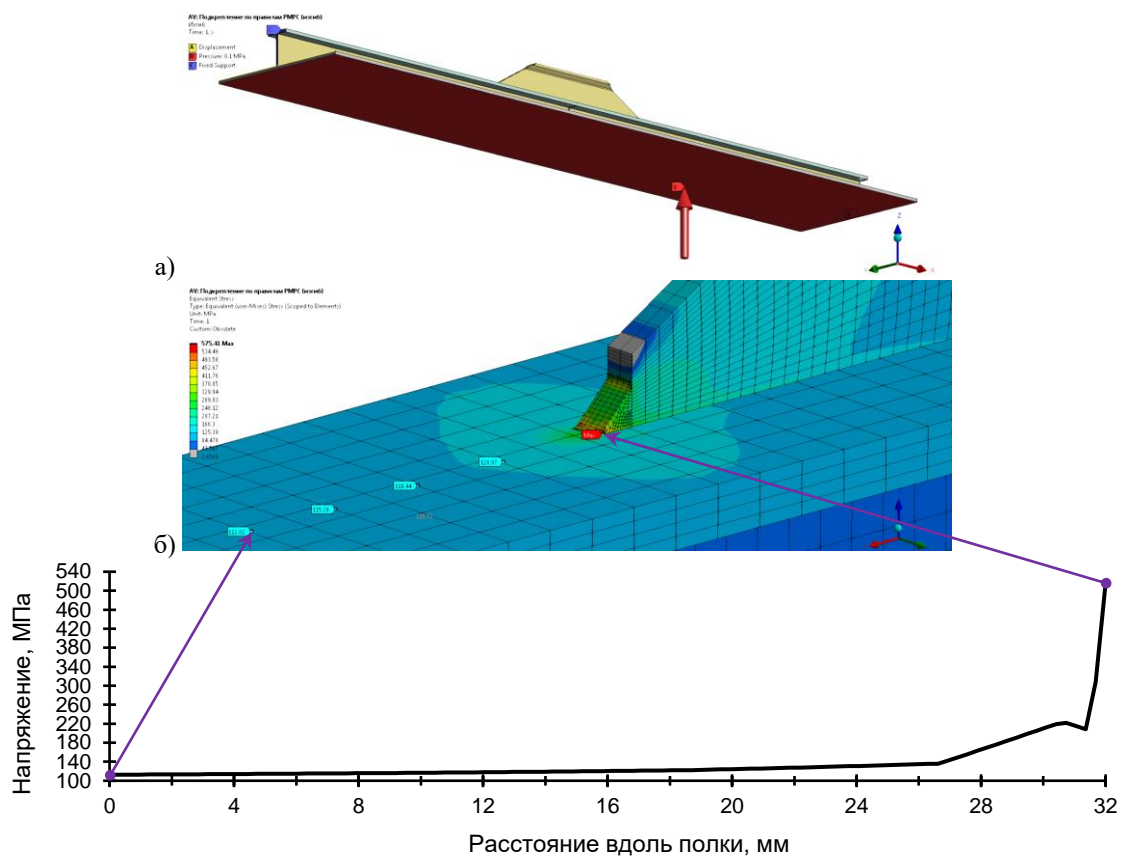


Рис. 3.6 – Определение концентрации напряжений в сварном шве на кончике ПЭ при изгибе панелей давлением: а) постановка задачи; б) поле напряжений около сварного шва; в) распределение напряжений вдоль верхней плоскости полки ребра

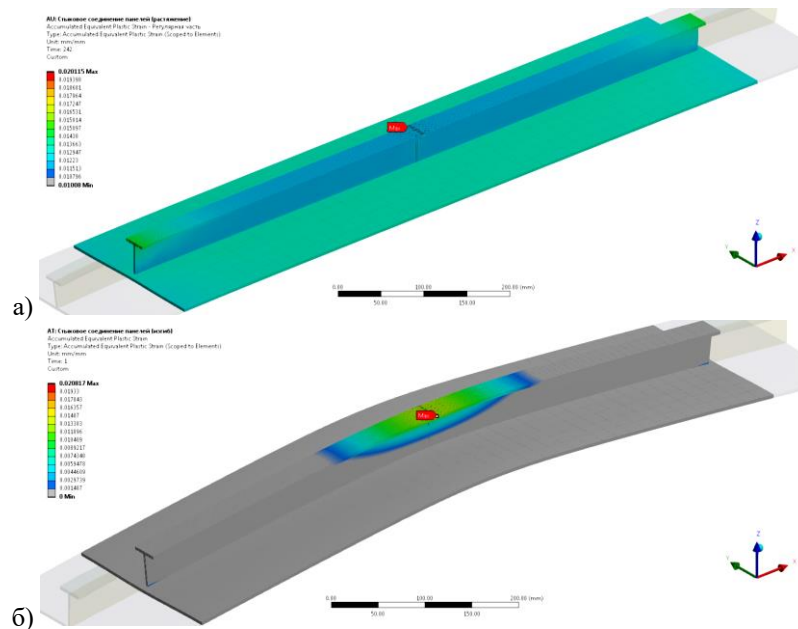


Рис. 3.7 – Результаты упруго-пластических расчётов стыкового соединения панелей без ПЭ. Распределение накопленных пластических деформаций: а) при растяжении напряжением 242 МПа; б) при изгибе давлением 119,5 кПа на наружную обшивку

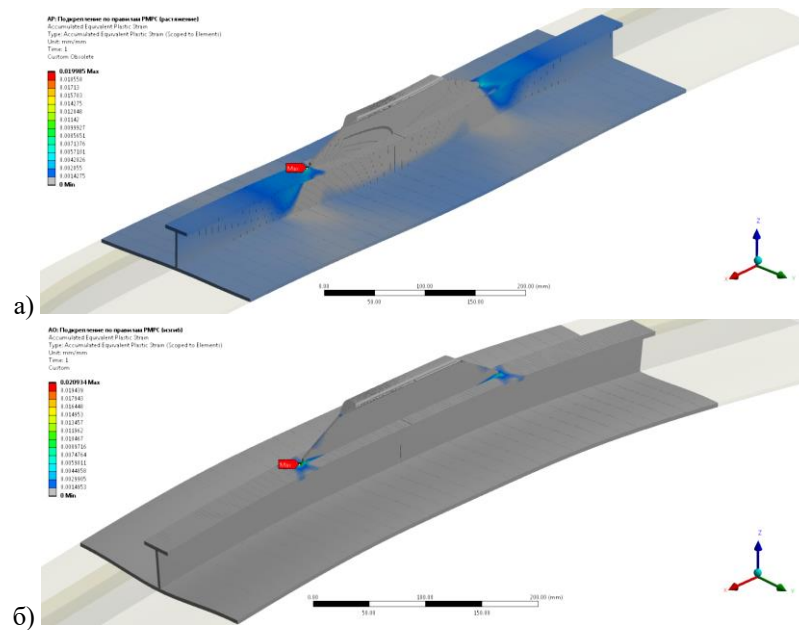


Рис. 3.8 – Результаты упруго-пластических расчётов стыкового соединения панелей с ПЭ, рекомендованным Правилами РМРС. Распределение накопленных пластических деформаций: а) при растяжении напряжением 210 МПа; б) при изгибе давлением 114,0 кПа на наружную обшивку

Дополнительно была выполнена проверка устойчивости по алгоритму, описанному в п.2.2.3. Сначала выполнялся расчёт линейной устойчивости, позволивший определить первую форму потери устойчивости и соответствующую ей эйлерову нагрузку  $F^e$ . Далее эта нормированная форма с масштабным множителем 0,001 послужила в качестве начального несовершенства конструкции узла, для которого был выполнен расчёт нелинейной устойчивости с определением критической нагрузки  $F^{cr}$ . При этом в случае сжатия шаг сжимающего напряжения составлял 0,5 МПа, а в случае изгиба шаг наружного давления составлял 1 кПа. Формы потери устойчивости и определение критической нагрузки для стыкового соединения без подкрепления в случаях сжатия и изгиба показаны на рис. 3.9 и рис. 3.10 соответственно. Формы потери устойчивости и определение критической нагрузки для стыкового соединения с рекомендованным Правилами РМРС подкреплением в случаях сжатия и изгиба показаны на рис. 3.11 и рис. 3.12 соответственно. В табл. 3.4 приведены найденные значения эйлеровых и критических нагрузок.

Табл. 3.4 – Эйлеровы и критические нагрузки потери устойчивости

Тип подкрепления	Напряжения сжатия, МПа		Давление изгиба, кПа	
	эйлерово	критическое	эйлерово	критическое
Без подкрепления	75,5	76,5	158	109
Рекомендованное Правилами РМРС подкрепление	76,1	75,0	181	123

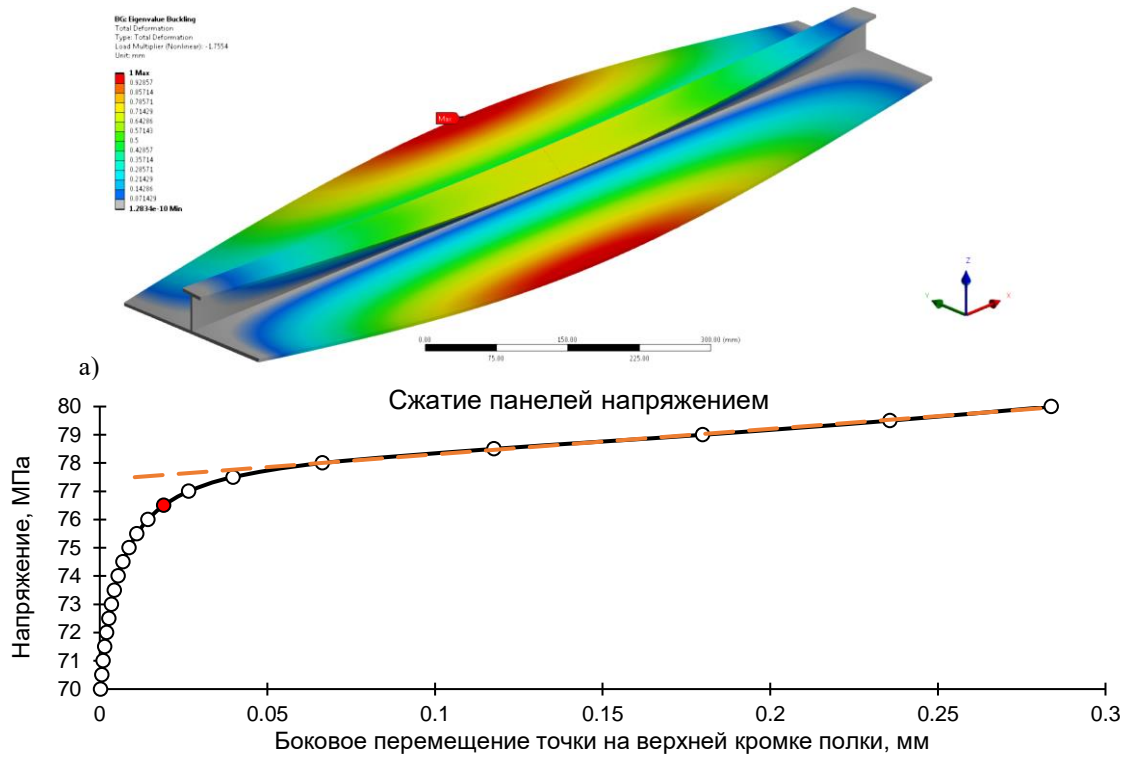


Рис. 3.9 – Проверка устойчивости стыкового соединения без ПЭ при действии сжимающего панели напряжения (от общего изгиба корпуса судна): а) первая форма потери устойчивости и соответствующее ей сжимающее напряжение 75,5 МПа в расчёте линейной устойчивости; б) определение критической нагрузки в расчёте нелинейной устойчивости (● – точка потери устойчивости, которой соответствует критическое сжимающее напряжение 76,5 МПа)

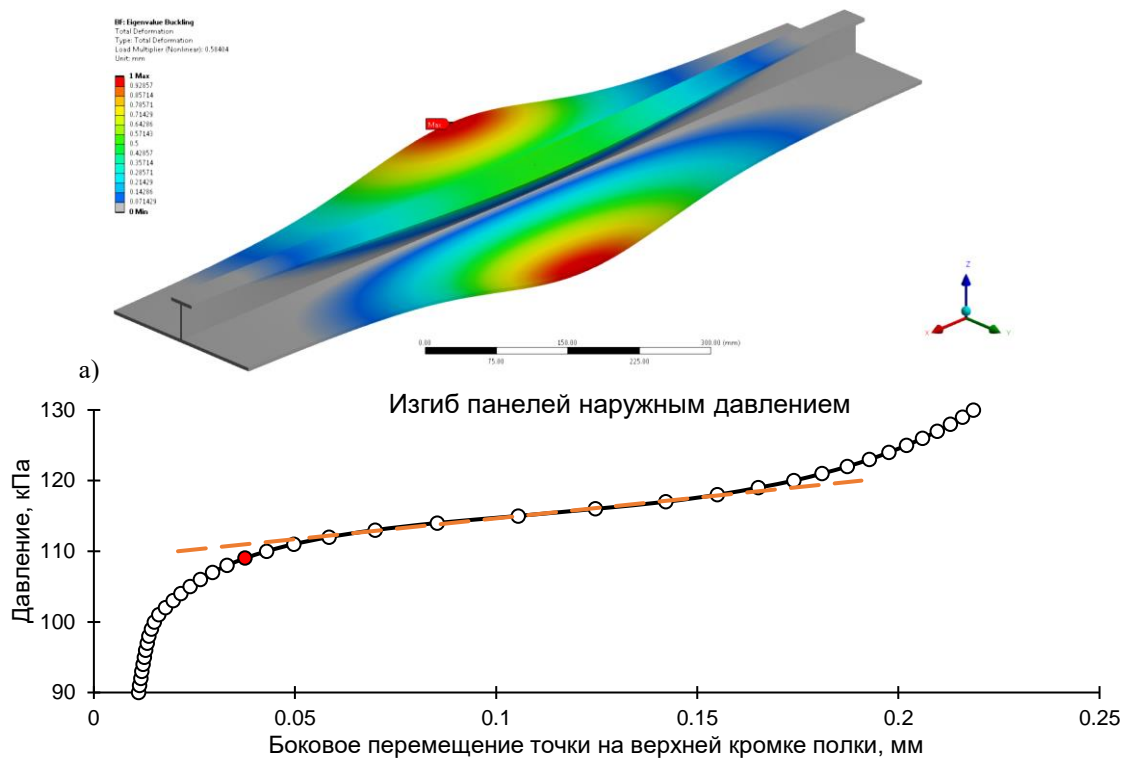


Рис. 3.10 – Проверка устойчивости стыкового соединения без ПЭ при действии изгибающего панели давления (от местных нагрузок на корпус судна): а) первая форма потери устойчивости и соответствующее ей изгибающее давление 158 кПа в расчёте линейной устойчивости; б) определение критической нагрузки в расчёте нелинейной устойчивости (● – точка потери устойчивости, которой соответствует критическое изгибающее давление 109 кПа)

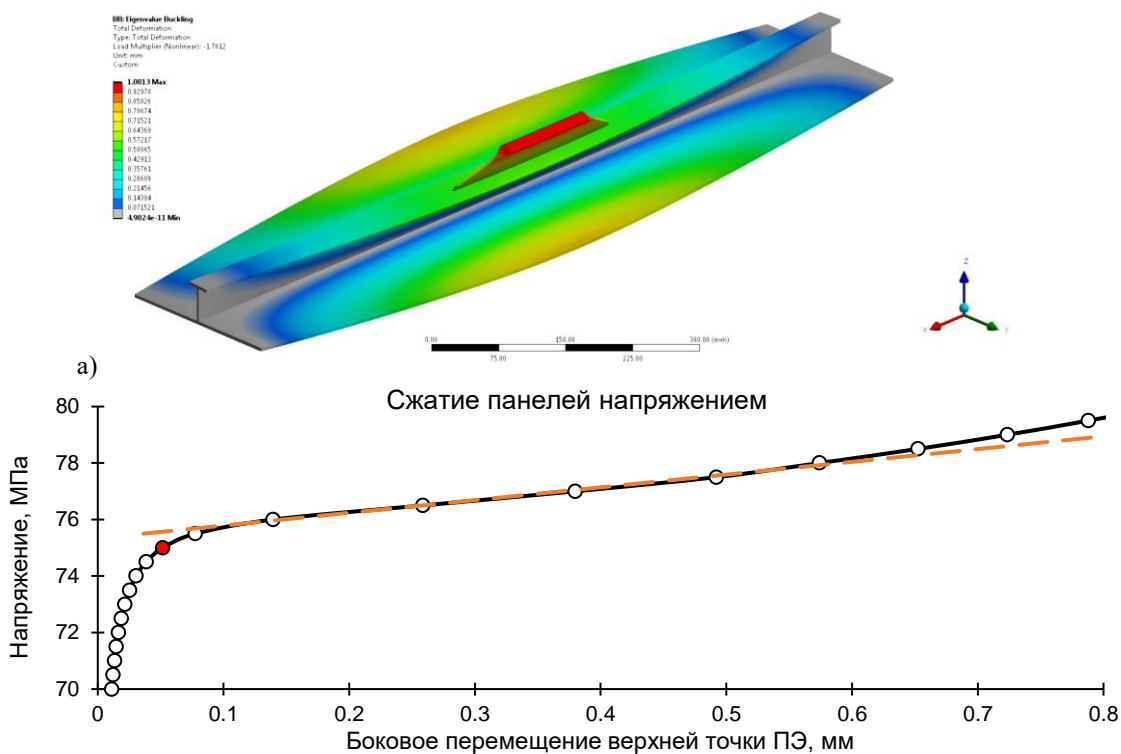


Рис. 3.11 – Проверка устойчивости стыкового соединения с рекомендованным Правилами РМРС подкреплением при действии сжимающего панели напряжения (от общего изгиба корпуса судна): а) первая форма потери устойчивости и соответствующее ей сжимающее напряжение 76,1 МПа в расчёте линейной устойчивости; б) определение критической нагрузки в расчёте нелинейной устойчивости (● – точка потери устойчивости, которой соответствует критическое сжимающее напряжение 75,0 МПа)

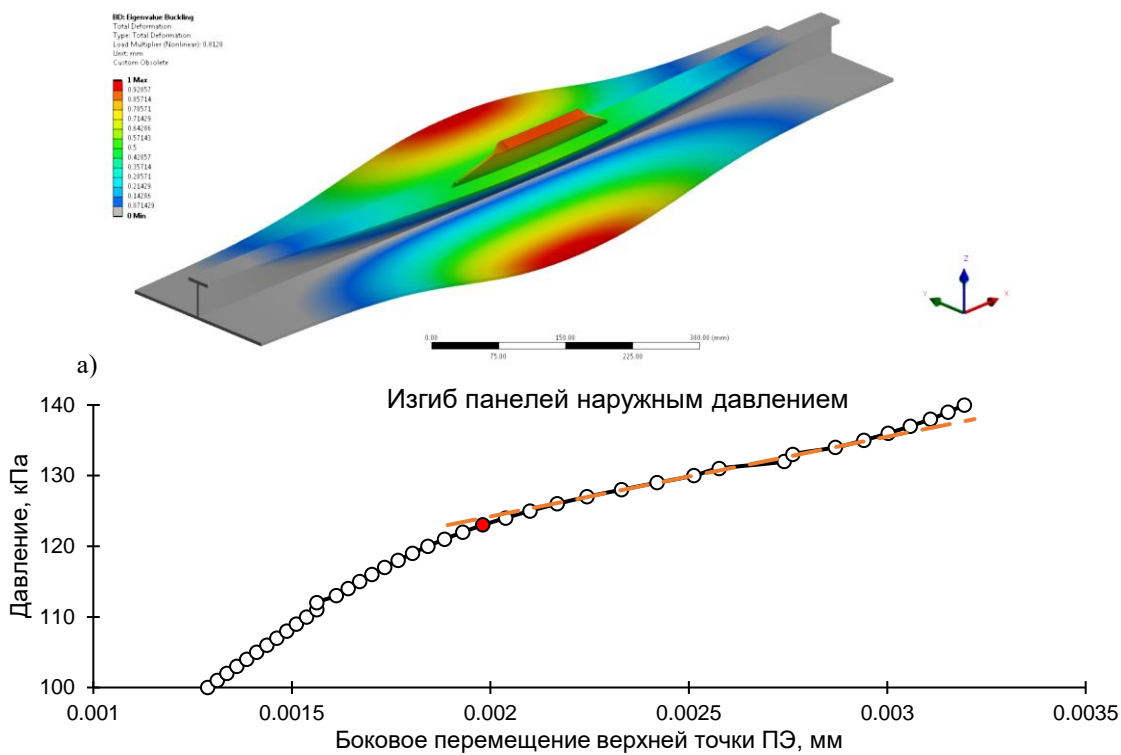


Рис. 3.12 – Проверка устойчивости стыкового соединения с рекомендованным Правилами РМРС подкреплением при действии изгибающей панели давления (от местных нагрузок на корпус судна): а) первая форма потери устойчивости и соответствующее ей изгибающее давление 181 кПа в расчёте линейной устойчивости; б) определение критической нагрузки в расчёте нелинейной устойчивости (● – точка потери устойчивости, которой соответствует критическое изгибающее давление 123 кПа)

### 3.1.2 Оптимизация подкрепляющего элемента

#### 3.1.2.1 Топологическая оптимизация

Задача топологической оптимизации ПЭ решалась двумя методами: SIMP (п.1.2.2.2) и LS (п.1.2.2.3). ТО выполнялась на действие растягивающей и изгибающей нагрузок (рис. 3.13а,б). В качестве области проектирования был принят полособульб, как в Правилах РМРС (но без сбega «на ус» на концах, см. рис. 3.13в). Минимизировалась податливость (потенциальная энергия деформации) ПЭ, а ограничением выступала его остаточная масса величиной не более 50 % от первоначальной. Наличие нескольких расчётных нагрузок потребовало задания их фактических, а не единичных значений.

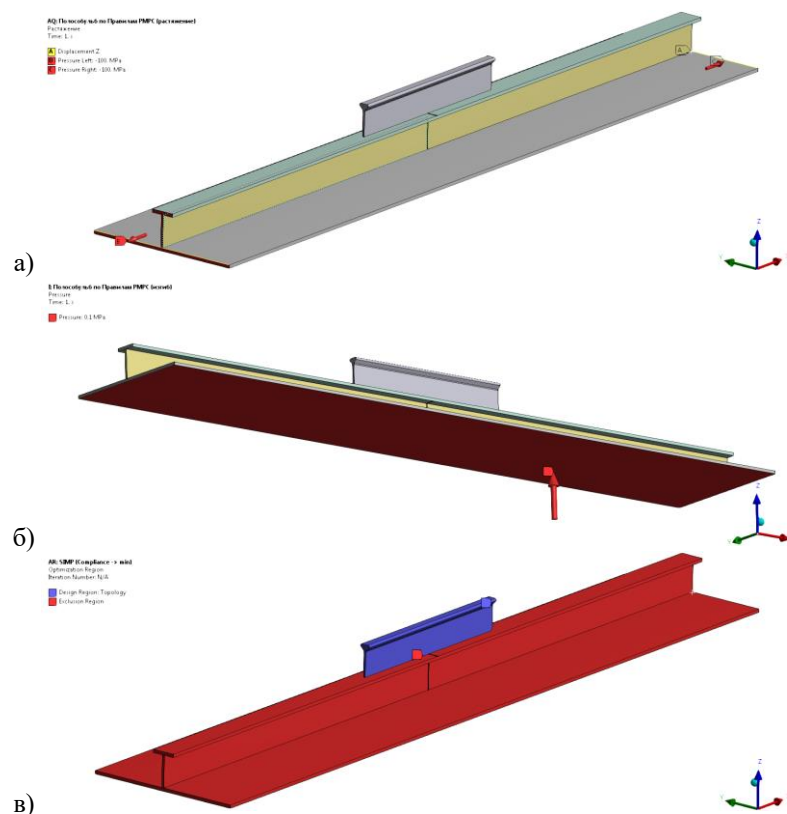


Рис. 3.13 – Постановка задачи ТО ПЭ в форме полособульба: а) нагрузка при растяжении; б) нагрузка при изгибе; в) область проектирования (показана синим цветом)

Результаты ТО полособульба показаны на рис. 3.14. Как видно, в случае растяжения панелей оба метода почти полностью «съели» пояс полособульба, что говорит о нерациональности его наличия (по причине возникновения внецентренного растяжения). В случае изгиба панелей ситуация иная: здесь метод SIMP привёл к образованию арочной структуры с сохранением значительной части пояса, а метод LS привёл к получению решения, похожего на решение при растяжении панелей, но с сохранением небольшой части пояса. Структуры, полученные при одновременном действии растягивающего напряжения и изгибающего давления, показаны на рис. 3.14ж,з. В случае многокритериальной оптимизации, когда ТО выполнялась при раздельном действии растягивающей и изгибающей нагрузок

(минимизировалась взвешенная сумма податливостей), полученные решения очень похожи на результаты оптимизации при действии только растягивающей нагрузки (рис. 3.14д,е). При этом во всех случаях на концах ПЭ получился сбеги «на ус», очень похожий на рекомендуемый Правилами РМРС.

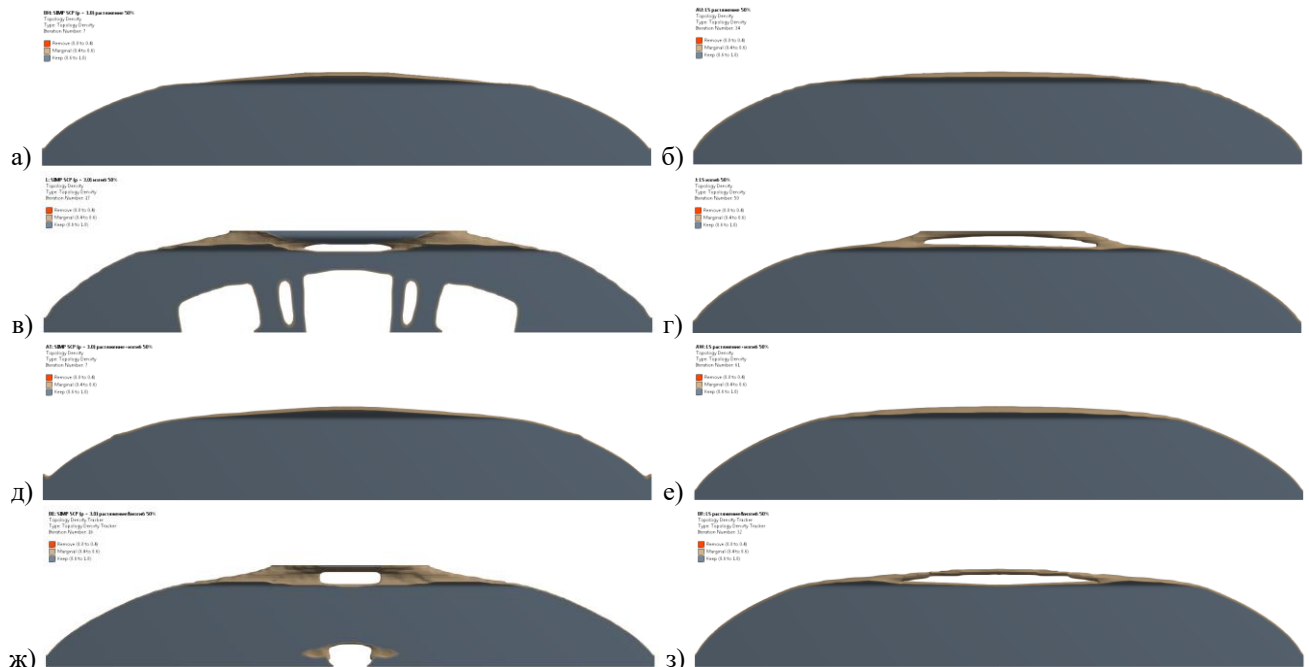


Рис. 3.14 – Результаты ТО ПЭ в форме полособульба при действии  
- растягивающего напряжения 100 МПа: а) SIMP ПВП,  $p = 3.0$ ; б) LS;

- изгибающего давления 100 кПа: в) SIMP ПВП,  $p = 3.0$ ; г) LS
- растягивающего напряжения и изгибающего давления по отдельности: д) SIMP ПВП,  $p = 3.0$ ; е) LS
- растягивающего напряжения и изгибающего давления одновременно: ж) SIMP ПВП,  $p = 3.0$ ; з) LS

Поскольку сколь-либо значимая часть пояска сохранилась только в единственном случае – при решении методом SIMP с изгибом панелей, в целях повышения технологичности конструкции было принято решение выполнить ПЭ из листового проката с площадью сечения, равной площади сечения полособульба, и провести его ТО в постановке, аналогичной выполненной ранее. На рис. 3.15 показаны результаты ТО листового ПЭ. Здесь в случае действия растягивающей нагрузки оба метода продемонстрировали практически одинаковое решение, а в случае действия изгибающей нагрузки – оба решения хотя и имеют арочную структуру, но конструкции арок существенно различаются. Структуры, полученные при одновременном действии растягивающего напряжения и изгибающего давления, показаны на рис. 3.15ж,з. Решения, полученные в случае многокритериальной оптимизации, когда ТО выполнялась при раздельном действии растягивающей и изгибающей нагрузок, показаны на рис. 3.15д,е.

Среди представленных решений за основу для последующей ПО и ОФ были взяты решения SIMP/LS при растяжении панелей.



Рис. 3.15 – Результаты ТО листового ПЭ при действии  
 - растягивающего напряжения 100 МПа: а) SIMP ПВП,  $p = 3.0$ ; б) LS;  
 - изгибающего давления 0,1 МПа: в) SIMP ПВП,  $p = 3.0$ ; г) LS  
 - растягивающего напряжения и изгибающего давления по отдельности: д) SIMP ПВП,  $p = 3.0$ ; е) LS  
 - растягивающего напряжения и изгибающего давления одновременно: ж) SIMP ПВП,  $p = 3.0$ ; з) LS

### 3.1.2.2 Параметрическая оптимизация

Для выполнения ПО необходимо параметризовать конструкцию ПЭ. Один из возможных способов его параметризации показан на рис. 3.16.

В задаче ПО минимизировалась масса ПЭ. Границы изменения параметров приведены в табл. 3.5. В качестве ограничений выступали максимальные значения эквивалентных по Мизесу напряжений: 120 МПа в случае растяжения и 150 МПа в случае изгиба. Решение задачи ПО выполнялось в ПК ANSYS Workbench с помощью метода NLPQL (п.1.2.1.2.3). При этом сопутствующие прочностные задачи решались в симметричной постановке (рис. 3.17).

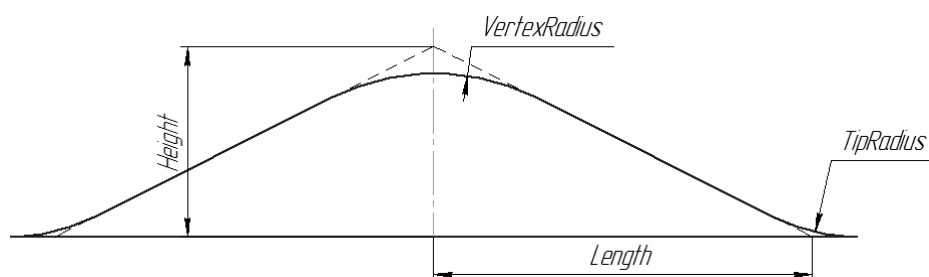


Рис. 3.16 – Параметризация листовой конструкции ПЭ

Табл. 3.5 – Границы изменения параметров в задачах оптимизации ПЭ

Параметр	Нижняя граница	Верхняя граница
<i>Height</i> , мм	10	100
<i>Length</i> , мм	50	300
<i>TipRadius</i> , мм	5	100
<i>VertexRadius</i> , мм	5	1000

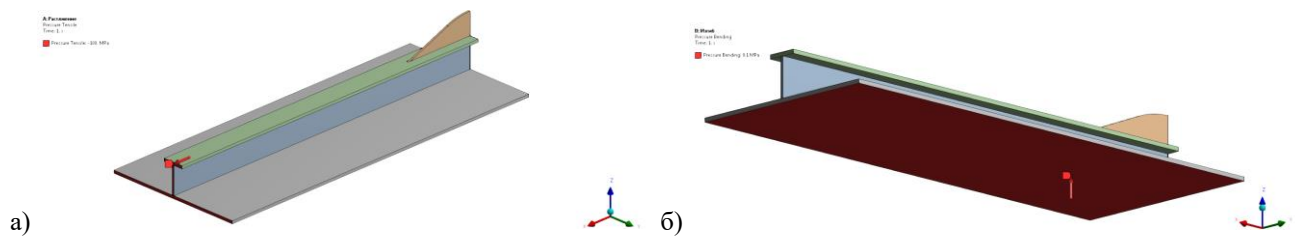


Рис. 3.17 – Прочностные задачи, сопутствующие ПО: а) нагрузка при растяжении; б) нагрузка при изгибе

В результате решения задачи ПО получен оптимальный листовой ПЭ массой 6 г (рис. 3.18) со следующими значениями параметров:

- $Height = 21$  мм;
- $Length = 58$  мм;
- $TipRadius = 100$  мм;
- $VertexRadius = 261$  мм.

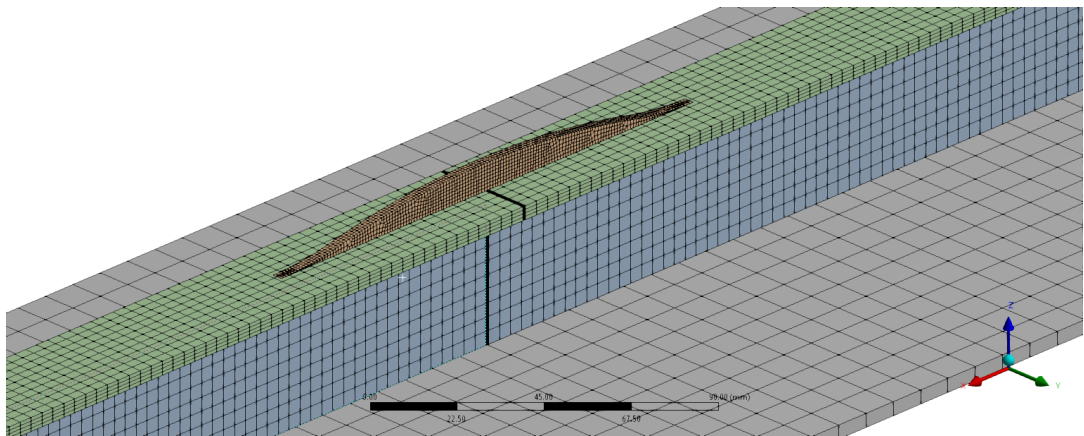


Рис. 3.18 – Оптимальный по массе листовой ПЭ

На рис. 3.19а,б и рис. 3.20а,б показаны распределения напряжений вблизи кончика оптимизированного по массе листового ПЭ для случаев растяжения и изгиба соответственно. При этом значения напряжений в выточках на стыке панелей оказались даже чуть выше значений напряжений на кончике ПЭ (см. рис. 3.19в и рис. 3.20в).



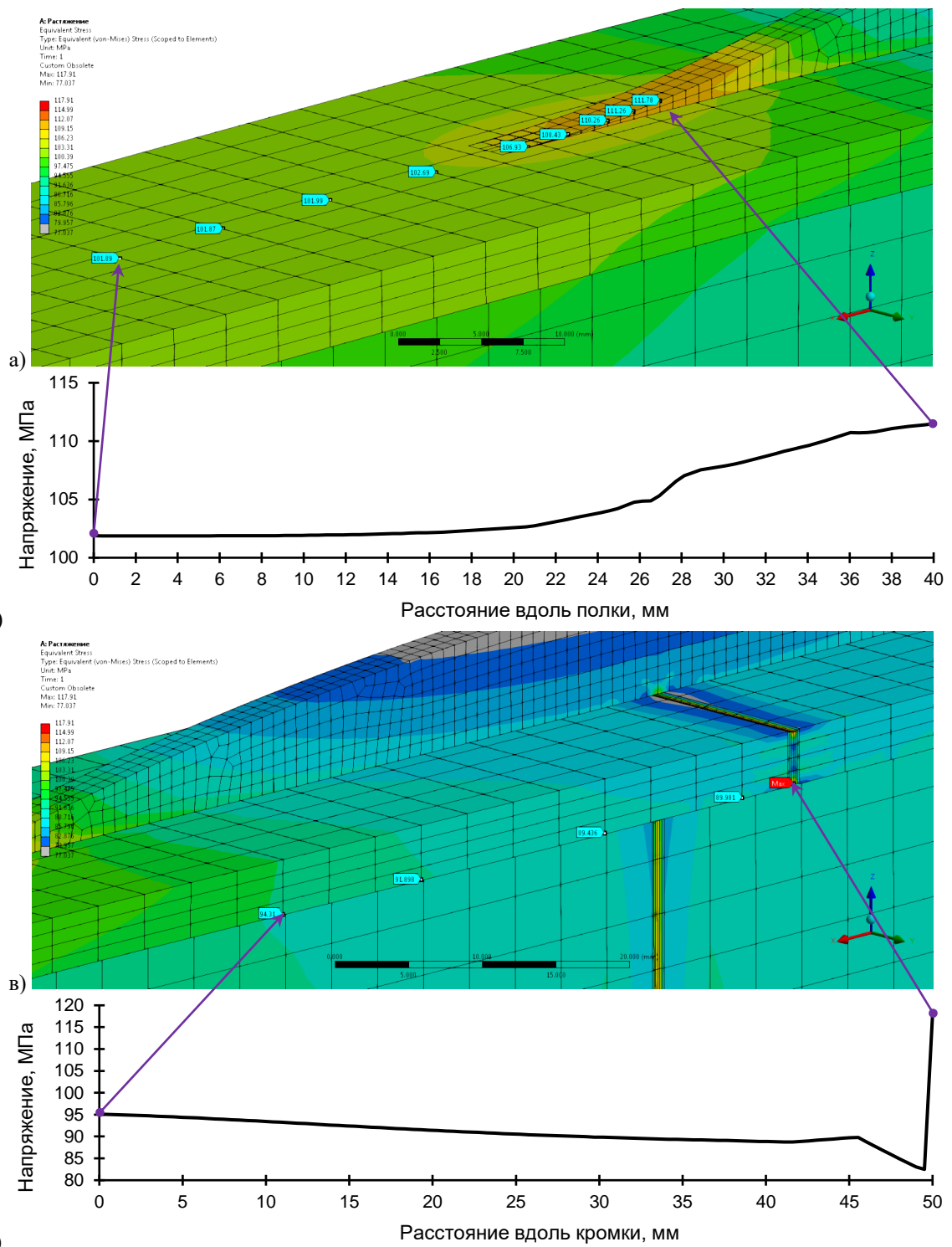


Рис. 3.19 – Определение концентрации напряжений на кончике оптимизированного по массе листового ПЭ при растяжении панелей напряжением: а) поле напряжений около кончика ПЭ; б) распределение напряжений вдоль верхней плоскости полки ребра; в) поле напряжений около выточки на стыке панелей; г) распределение напряжений вдоль нижней кромки полки ребра

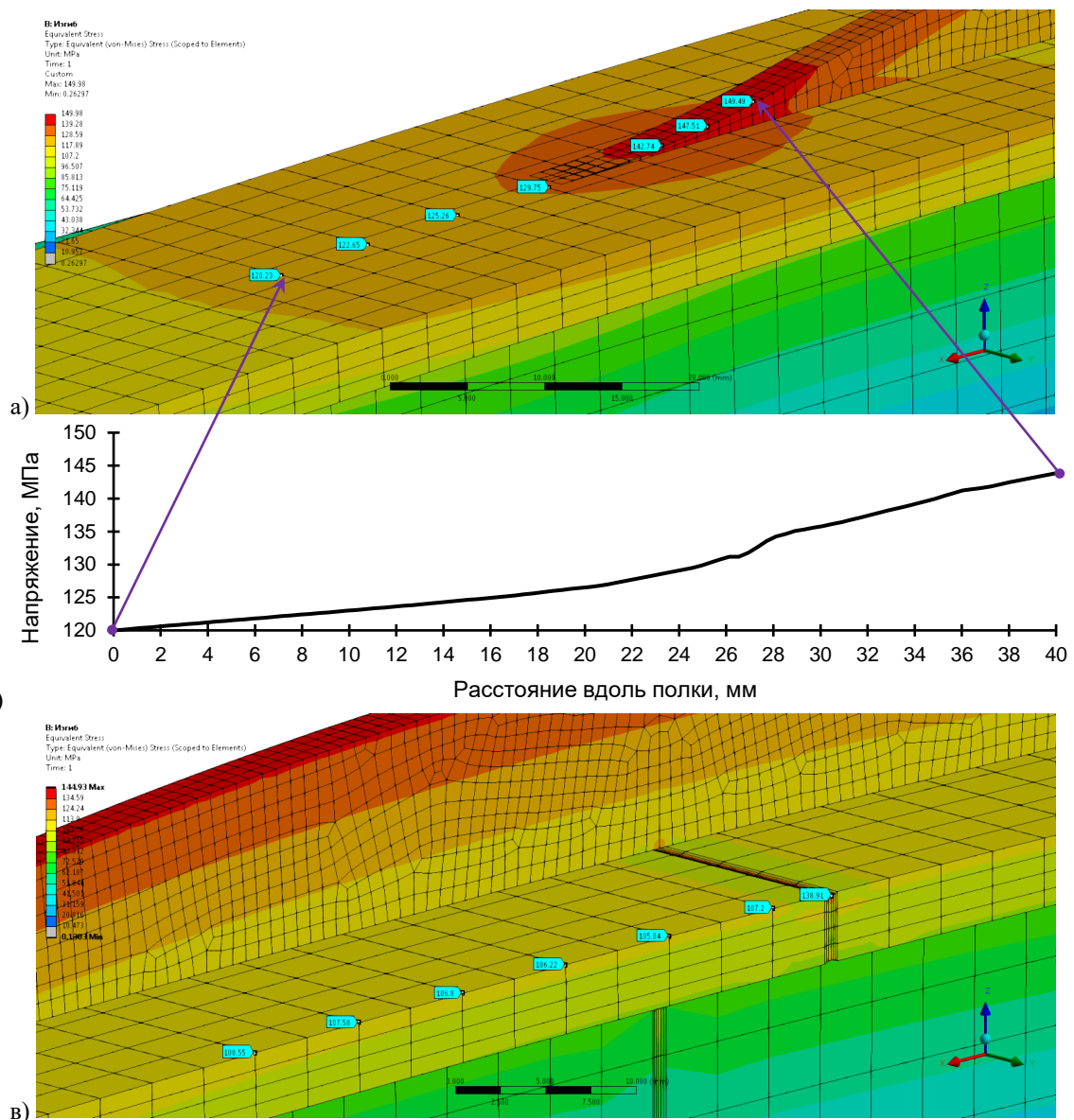


Рис. 3.20 – Определение концентрации напряжений на кончике оптимизированного по массе листового ПЭ при изгибе панелей давлением: а) поле напряжений около кончика ПЭ; б) распределение напряжений вдоль верхней плоскости полки ребра; в) поле напряжений около выточки на стыке панелей

### 3.1.2.3 Оптимизация формы

Для выполнения ОФ ПЭ требуется параметризовать его границу. Универсальным способом параметризации формы является описание границы конструкции через лежащие на ней КЭ узлы. Однако в данном случае параметризация, показанная на рис. 3.16, по сути уже является параметризацией формы ПЭ, и остаётся лишь задать границы изменения параметров и ограничения. Первые были выбраны как при параметрической оптимизации (табл. 3.5), а в качестве последних выступала масса ПЭ, которая не должна превышать 70 г (в симметричной постановке это даёт 35 г для половины ПЭ), что соответствует массе ПЭ, рекомендованного Правилами РМРС. Целевыми функциями являлись максимальные напряжения в случаях растяжения и изгиба, выполнялась минимизация их суммы:

$$\max \sigma_{eq}^{tensile} + \max \sigma_{eq}^{bending} \rightarrow \min. \quad (3.1)$$

Решение полученной задачи ОФ, сформулированной в параметрическом виде, выполнялось в ПК ANSYS Workbench с помощью метода NLPQL (п.1.2.1.2.3). Ниже на рис. 3.21 показаны графики изменения параметров в ходе решения.

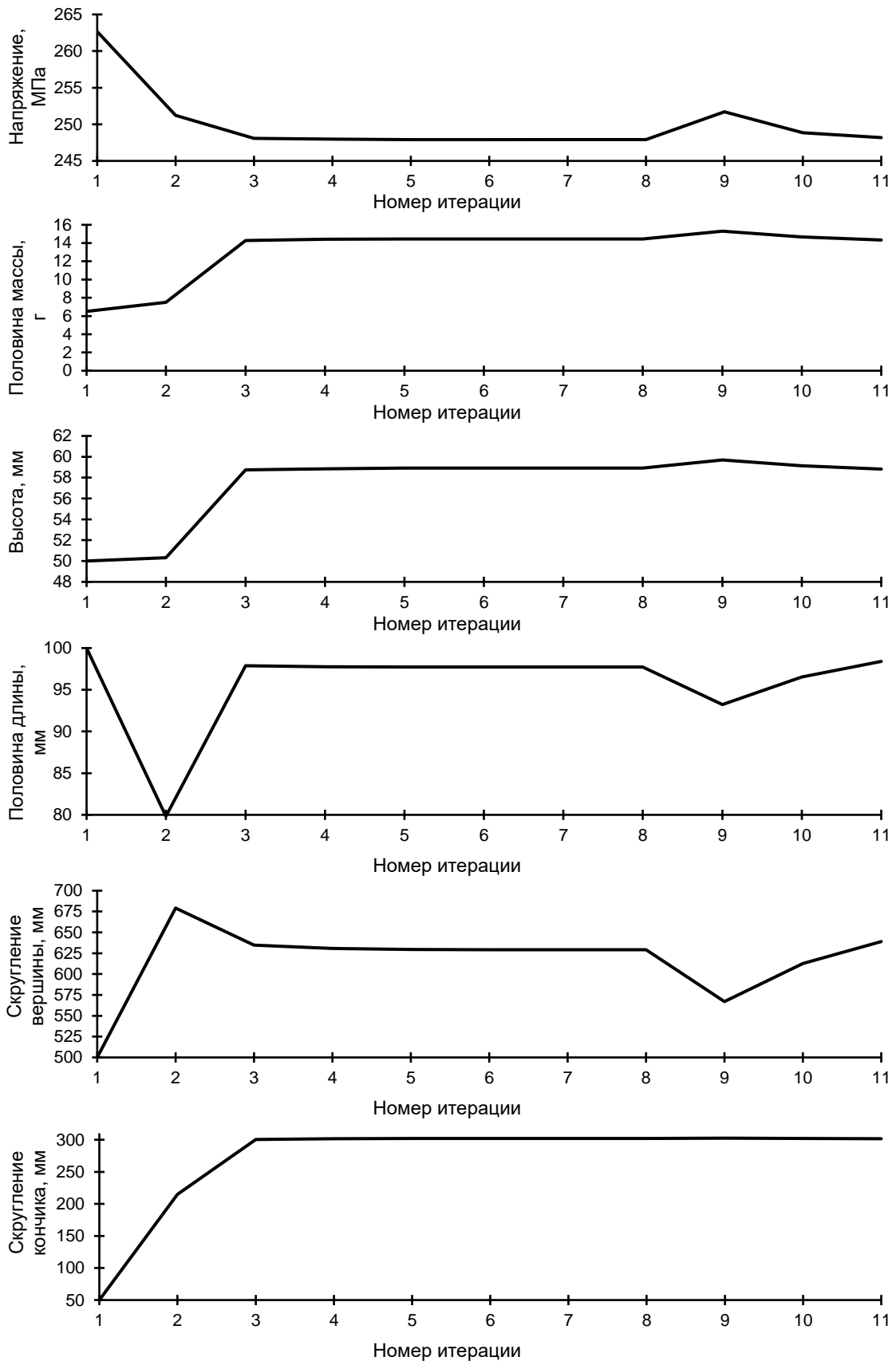


Рис. 3.21 – Графики изменения параметров в ходе решения задачи ОФ листового ПЭ

В результате был получен листовый ПЭ массой 29 г, имеющий оптимизированную форму (см. рис. 3.22) со следующими значениями параметров:

- *Height* = 59 мм;
- *Length* = 98 мм;
- *TipRadius* = 302 мм;
- *VertexRadius* = 629 мм.

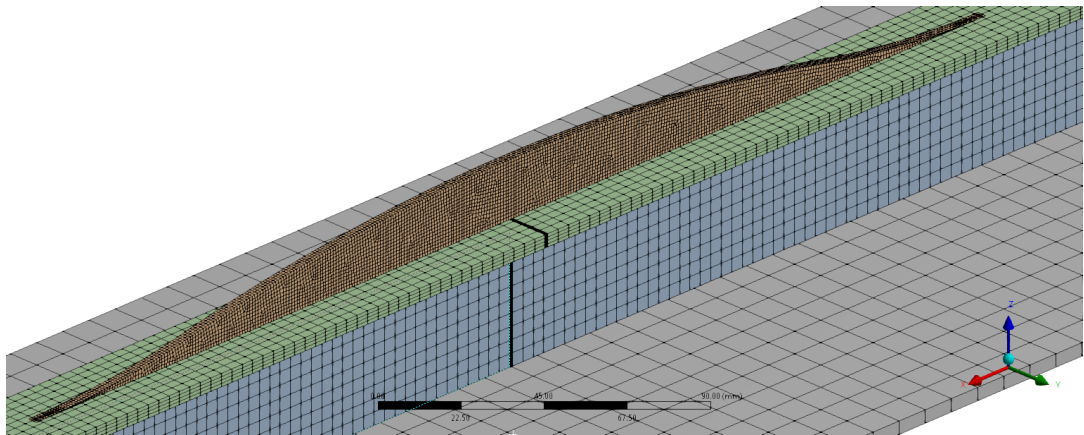
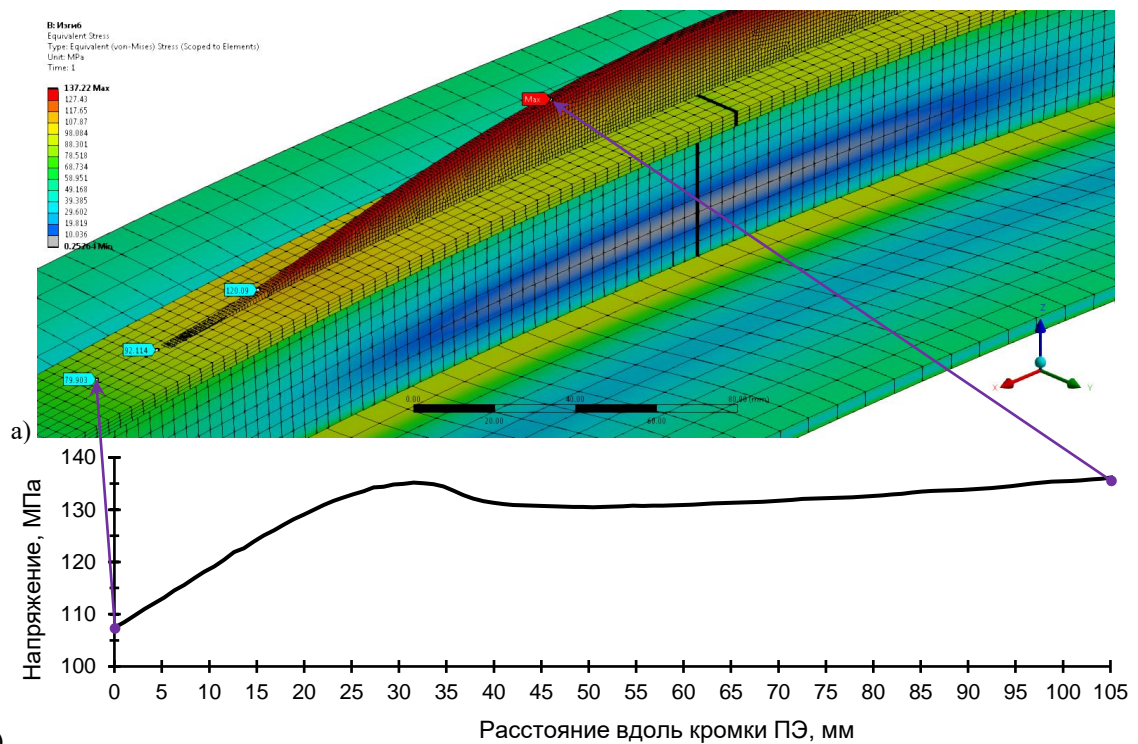


Рис. 3.22 – Листовой ПЭ оптимальной формы при минимизации взвешенной суммы максимальных напряжений

На рис. 3.24а,б и рис. 3.23а,б показаны распределения напряжений вблизи кончика листового ПЭ оптимальной формы для случаев растяжения и изгиба соответственно. При этом в случае растяжения панелей значения напряжений в выточке на стыке стенок ребёр жёсткости оказались несколько выше значений напряжений на кончике ПЭ (см. рис. 3.24в,г).



б)  
Рис. 3.23 – Распределение напряжений листового ПЭ оптимальной формы при изгибе панелей а) поле напряжений около кончика ПЭ; б) распределение напряжений вдоль верхней кромки ПЭ

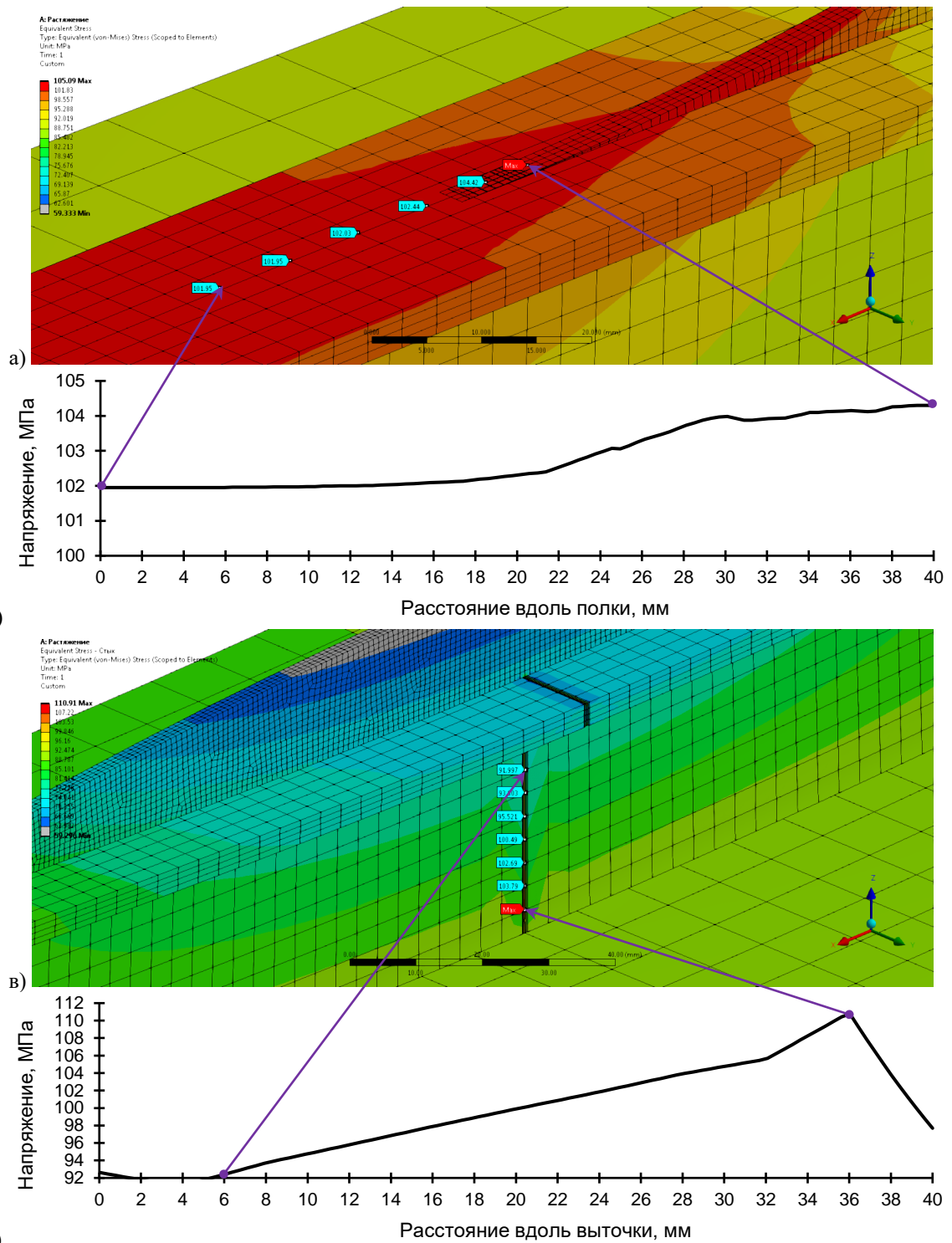


Рис. 3.24 – Определение концентрации напряжений на кончике листового ПЭ оптимальной формы и в стыке панелей при их растяжении: а) поле напряжений около кончика ПЭ; б) распределение напряжений вдоль верхней плоскости полки ребра; в) поле напряжений около выточки на стыке панелей; г) распределение напряжений вдоль выточки на стыке стенок рёбер жёсткости

### 3.1.3 Оценка эффективности оптимизированного подкрепляющего элемента

Для оценки эффективности оптимизированного листового ПЭ был выполнен его упруго-пластический расчёт с использованием линейной кинематической модели упрочнения до достижения накопленными пластическими деформациями величины 2 % от действия как растягивающей, так и изгибающей нагрузки. Полученные распределения пластических

деформаций показаны на рис. 3.25.

Как и ранее, дополнительно была выполнена проверка устойчивости по алгоритму, описанному в п.2.2.3. Формы потери устойчивости и определение критической нагрузки в случаях сжатия и изгиба показаны на рис. 3.26 и рис. 3.27 соответственно.

Результаты всех выполненных расчётов сведены в табл. 3.6. Сомнения по поводу эффективности ПЭ, рекомендованного Правилами РМРС, оправдались – коэффициент концентрации напряжений в его оконечностях превысил 3, что крайне негативно отразится на усталостных свойствах подобного узла как в случае МнЦУ, так и в случае МаЦУ. Оптимизированный листовой ПЭ имеет заметно более низкий коэффициент концентрации напряжений, не превышающий коэффициент концентрации стыкового сварного соединения, что повышает его ресурс при МнЦУ и МаЦУ, причём в последнем случае разрушающая нагрузка по сравнению с неподкреплённым сварным соединением выросла на 2 % в случае растяжения и на 9 % в случае изгиба панелей. При этом масса оптимизированного листового ПЭ более чем в 2 раза меньше массы ПЭ в форме полосульба, рекомендованного Правилами.

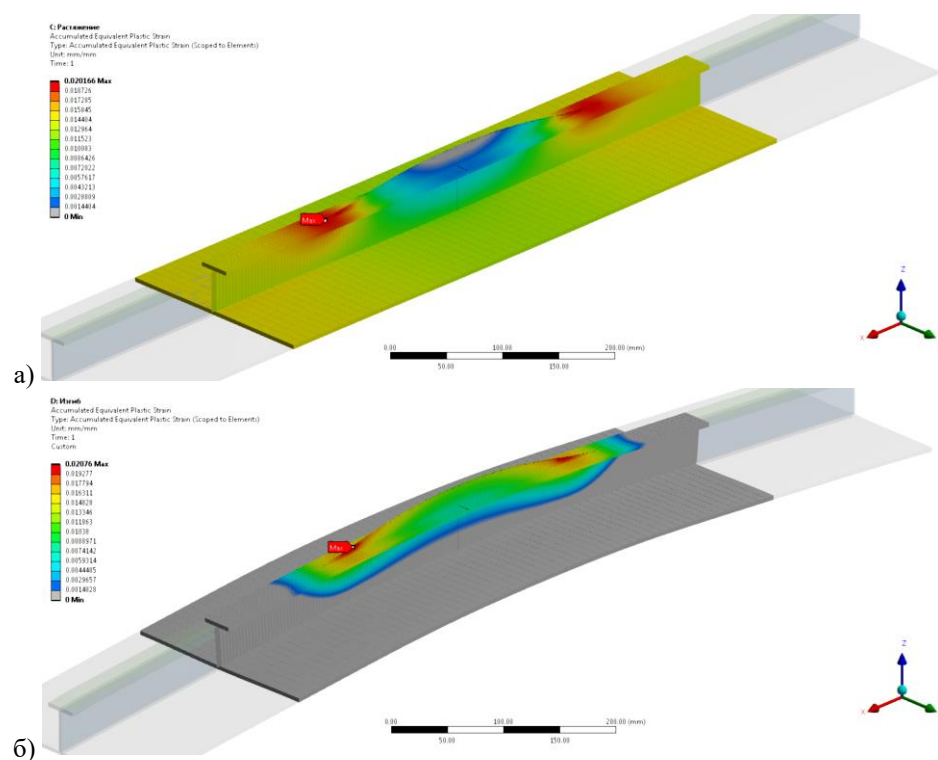


Рис. 3.25 – Результаты упруго-пластических расчётов стыкового соединения панелей с оптимизированным листовым ПЭ. Распределение накопленных пластических деформаций: а) при растягивающем напряжении 246 МПа; б) при изгибе давлением 136,0 кПа на наружную обшивку

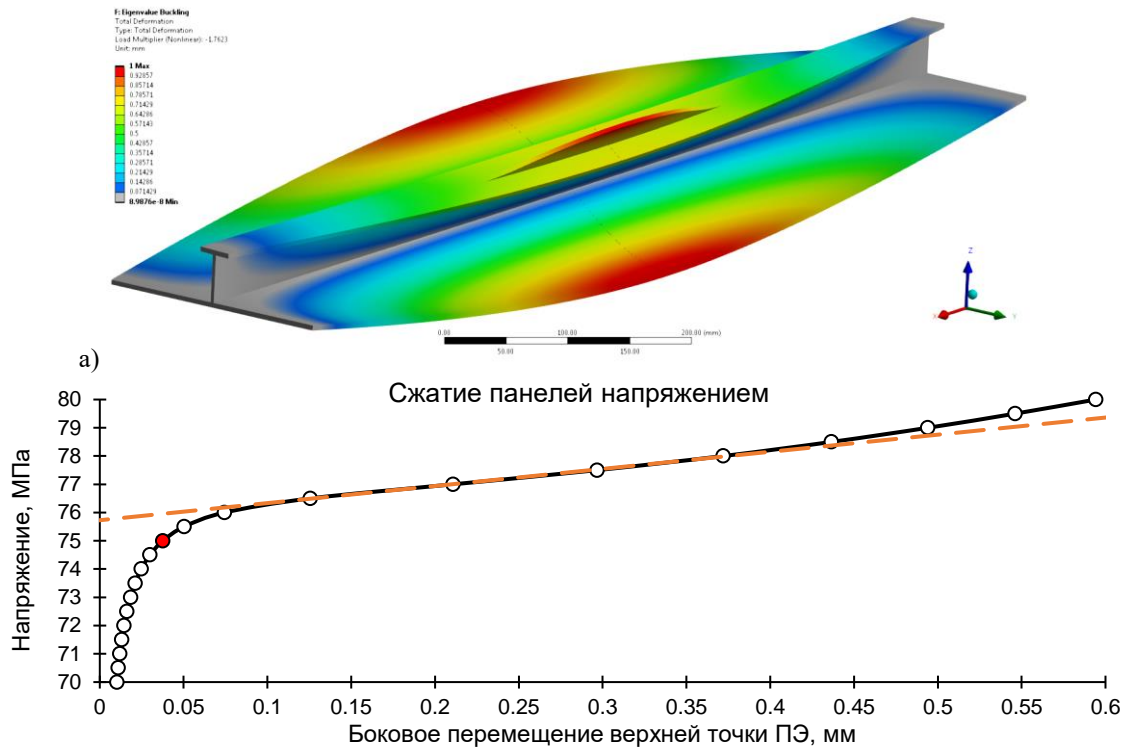


Рис. 3.26 – Проверка устойчивости при действии сжимающего панели напряжения (от общего изгиба корпуса судна): а) первая форма потери устойчивости и соответствующее ей сжимающее напряжение 76,2 МПа в расчёте линейной устойчивости; б) определение критической нагрузки в расчёте нелинейной устойчивости (● – точка потери устойчивости, которой соответствует критическое сжимающее напряжение 75,0 МПа)

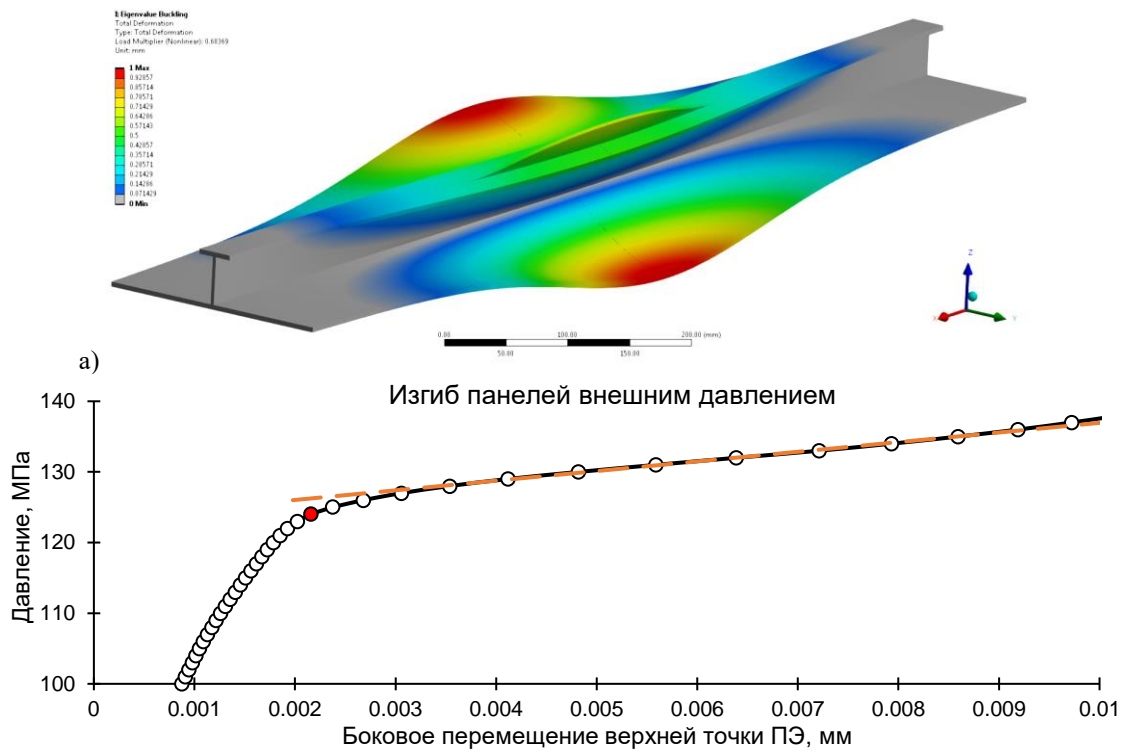


Рис. 3.27 – Проверка устойчивости при действии изгибающей панели давления (от местных нагрузок на корпус судна): а) первая форма потери устойчивости и соответствующее ей изгибающее давление 168,4 кПа в расчёте линейной устойчивости; б) определение критической нагрузки в расчёте нелинейной устойчивости (● – точка потери устойчивости, которой соответствует критическое изгибающее давление 124 кПа)

Табл. 3.6 – Сопоставление рекомендованного Правилами РМРС и оптимизированного ПЭ

Подкрепляющий элемент	Коэффициент концентрации напряжений	Достижение пластической деформации 2 %		Критическая нагрузка		Масса
		при растяжении напряжением, МПа	при изгибе давлением, кПа	напряжение сжатия, МПа	наружное давление, кПа	
Отсутствует	1,33	242	119,5	76,5	109	0 %
Рекомендованный Правилами РМРС	3,44	210	114,0	75,0	123	100 %
Оптимизированный	1,05	246	136,0	75,0	124	42 %

### 3.1.4 Рекомендации по оформлению узла

На рис. 3.28 показана форма и указаны размеры листового ПЭ, близкого к оптимальному. Кончики ПЭ изначально имеют высоту  $t = 3-8 \text{ мм}^1$ , а после приварки элемента к ребру жёсткости происходит их механическая обработка фрезой. Такой ПЭ будет хорошо работать как в случае растяжения, так и в случае изгиба панелей, при многоцикловой и малоцикловой усталости; он обладает небольшой массой, низким коэффициентом концентрации напряжений и эффективно снижает уровень напряжений в сварном шве на стыке панелей. Подобные обстоятельства делают применение разработанного листового ПЭ намного более эффективным (особенно в случае действия местных нагрузок), увеличивая межсервисные интервалы осмотра и ремонта корпусных конструкций и снижая их материалоемкость.

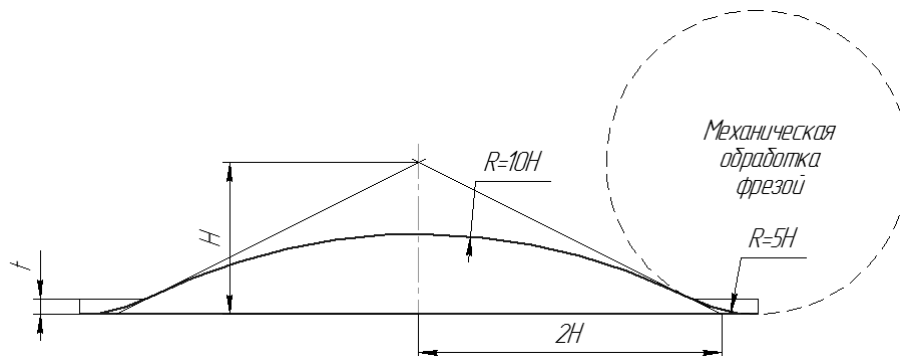


Рис. 3.28 – Разработанное рекомендуемое оформление листового подкрепляющего элемента

## 3.2 Поиск новых технических решений крышки люкового закрытия сухогрузного судна

Крышка люкового закрытия (ЛЗ) сухогрузного судна служит для обеспечения непроницаемости грузовых помещений и перевозки на ней грузов, например, контейнеров. При больших размерах люка крышка обычно используется попарно с другой крышкой таких же габаритов. Каждая из них опирается по трём кромкам на комингс люка, а четвёртой свободной (неопертой) кромкой притыкается в рабочем положении через уплотнительный контур к смежной крышке, вместе с которой они перекрывают люк. Крышка содержит настил, под которым закреплены продольные и поперечные подкрепляющие элементы, причём по контуру

<sup>1)</sup> Наименьшее значение соответствует лазерной сварке, наибольшее – электродуговой.



настила, имеющего прямоугольную форму в плане, расположены усиленные балки. Подкрепляющие настил рёбра жёсткости имеют, как правило, одинаковое поперечное сечение и расположены параллельно свободной кромке крышки через одинаковые промежутки, называемые шпацией. Подкрепляющие элементы в виде усиленных балок набора крышки располагаются как параллельно рёбрам жёсткости (рамные продольные балки), так и перпендикулярно им (поперечные балки). Рамные балки выполняются с такой же высотой, как и усиленные балки на контуре крышки. Перекрёстные балки по высоте значительно больше рёбер жёсткости. По отношению к высоте рамных балок поперёк связи бывают либо сопоставимыми с ними, либо (что наблюдается преимущественно) меньшими их. Такое конструктивное оформление характерно для современной стальной конструкции крышки ЛЗ сухогрузного судна проекта RSD59 компании Морское Инженерное Бюро (см. рис. 3.29).

Крышка ЛЗ является конструкцией повышенной ответственности, надёжность работы которой обеспечивает безопасность сухогрузных судов и осуществляемой на них морской перевозки грузов. Успешное функционирование крышки с расположенным на ней грузом обеспечивается при двух условиях: отсутствие нарушения её прочности и отсутствие предельно допустимых вертикальных перемещений её свободной кромки, превышение которых создаёт опасность нарушения герметичности ЛЗ.

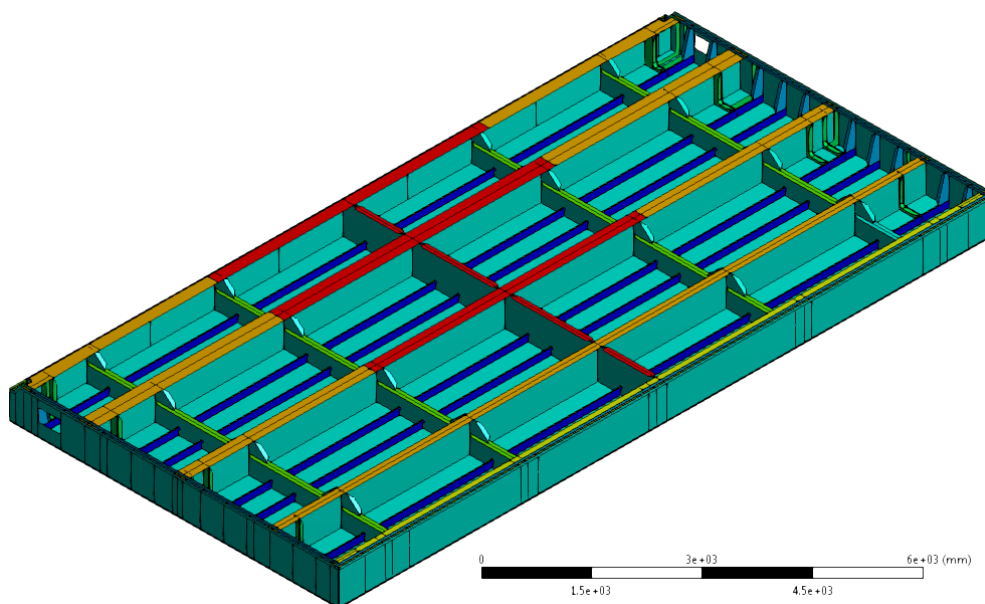


Рис. 3.29 – Конструкция стальной крышки ЛЗ. Вид снизу (конструктивные элементы раскрашены согласно их толщине)

Недостатками подобной крышки ЛЗ являются большая материалоемкость, снижающая экономическую эффективность судна как транспортного средства, и необходимость использования мощных и массогабаритных средств подъема крышек (для съёмных ЛЗ), либо поворота и передвижения крышек (для шарнирно-откидных ЛЗ). Эти недостатки обусловлены

нерациональным конструктивным оформлением крышки и неправильным выбором соотношений между жёсткостями балок на изгиб. Для снижения материалоемкости крышек предлагается, во-первых, использовать для их изготовления алюминиевый сплав 1561 и, во-вторых, пересмотреть их конструктивное оформление с помощью использования разработанного алгоритма рационального проектирования судовых конструкций, изложенного в параграфе 1.3.

### 3.2.1 Прочность стальной конструкции крышки

Для оценки прочности стальной конструкции крышки ЛЗ была построена её КЭ модель с применением оболочечных элементов второго порядка типа SHELL281 (рис. 3.30а). В качестве конструкционного материала для наружной обшивки и её рёбер жёсткости использовалась сталь категории РС D, а для остального набора – сталь категории РС D36, свойства которых приведены в табл. 3.7. Материал полагался линейным и упругим. Нагрузкой в задаче являлось равномерное давление  $p_L$  на настил крышки (см. рис. 3.30б), которое вычисляется по формуле [195]

$$p_L = p_c(1 + a_v) = 22,563(1 + 0,11) = 25,045 \text{ кН/м}^2, \quad (3.2)$$

где  $p_c = 22,563 \text{ кН/м}^2$  – равномерная нагрузка вследствие действия груза;

$a_v = F \cdot m = 0,11$  – добавочная вертикальная перегрузка.

Согласно [196] крышки люков района 1 рассчитываются на нагрузку  $3,5 \text{ т/м}^2$ , а крышки люков района 2 – на нагрузку  $2,6 \text{ т/м}^2$ . Поскольку исследуемая крышка относится к району 2, нагрузка  $p_L$  принималась равной  $25,506 \text{ кН/м}^2$ .

Табл. 3.7 – Механические свойства стали

Материал	Предел текучести $\sigma_y$ , МПа	Модуль Юнга $E$ , ГПа	Коэффициент Пуассона $\nu$	Плотность $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>
РС D	235	206	0,3	7850
РС D36	355			

Критерием прочности выступает эквивалентное по Мизесу напряжение  $\sigma_{eq}$  (2.40), которое согласно [195] не должно превышать  $0,9\sigma_F$ , если напряжения определяются с применением МКЭ:

$$\sigma_{eq} \leq 0,9\sigma_F, \quad (3.3)$$

где  $\sigma_F$  – минимальный предел текучести материала, МПа:

$$\sigma_F = \sigma_y, \quad (3.4)$$

что даёт 211,5 МПа для стали РС D и 319,5 МПа для стали РС D36.

Критерием жёсткости выступает прогиб  $u$  основных несущих элементов, который согласно [195] под действием расчётной нагрузки не должен составлять более

$$u \leq 0,0056\ell_g = 0,0056 \cdot 12580 = 70,4 \text{ мм}, \quad (3.5)$$

где  $\ell_g = 12580 \text{ мм}$  – самый большой пролёт между основными несущими элементами.

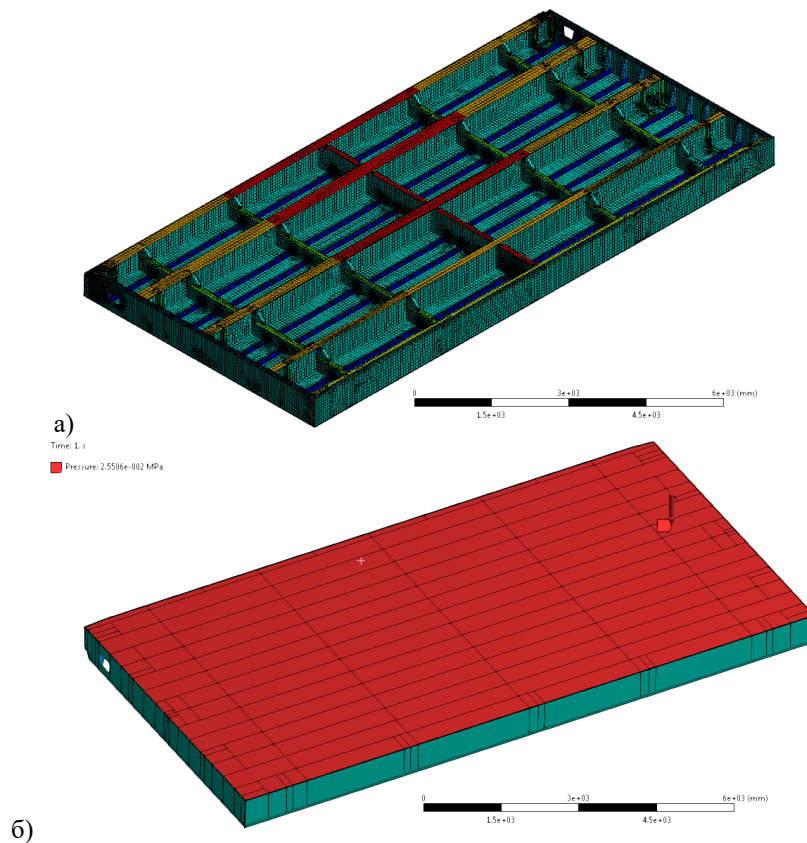


Рис. 3.30 – а) КЭ модель стальной конструкции крышки ЛЗ, вид снизу (конечные элементы раскрашены согласно их толщине); б) нагрузка в виде равномерного давления на настил

Полученные распределения напряжений и перемещений показаны на рис. 3.31. Как видно, напряжения в целом не превосходят допускаемого значения 319,5 МПа, однако имеются локальные зоны концентрации с превышением этого значения. Наибольшая концентрация напряжений возникает на пересечении центральной короткой и центральной длинной балок, где их максимальные значения достигают 879 МПа, что существенно больше предела текучести 355 МПа. Это говорит о появлении пластических деформаций, что потенциально может перевести работу конструкции в область МаЦУ. Также повышенные значения напряжений наблюдаются в корневом сечении центральной короткой связи. При этом максимальный прогиб составил 50,4 мм, что удовлетворяет критерию жёсткости (3.5).

Дополнительно была выполнена проверка устойчивости по алгоритму, описанному в п.2.2.3. Сначала выполнялся расчёт линейной устойчивости, позволивший определить первую форму потери устойчивости и соответствующую ей эйлерову нагрузку  $F^e$ . Далее эта нормированная форма с масштабным множителем 0,001 послужила в качестве начального несовершенства конструкции крышки ЛЗ, для которой был выполнен расчёт нелинейной устойчивости с определением критической нагрузки  $F^{cr}$ . При этом шаг увеличения давления составлял 0,1 кПа. Форма потери устойчивости и определение критической нагрузки для стальной конструкции крышки ЛЗ показаны на рис. 3.33.

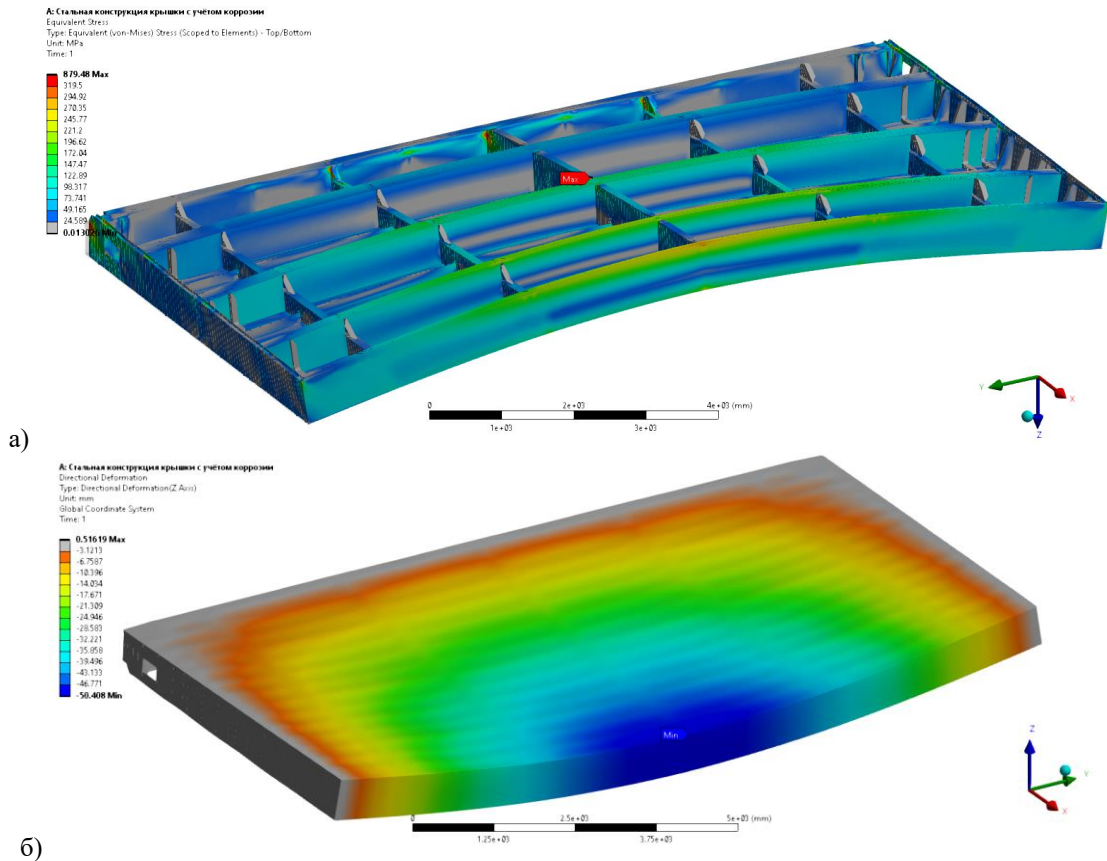


Рис. 3.31 – Результаты расчёта стальной конструкции крышки ЛЗ: а) поле напряжений; б) распределение вертикальных перемещений

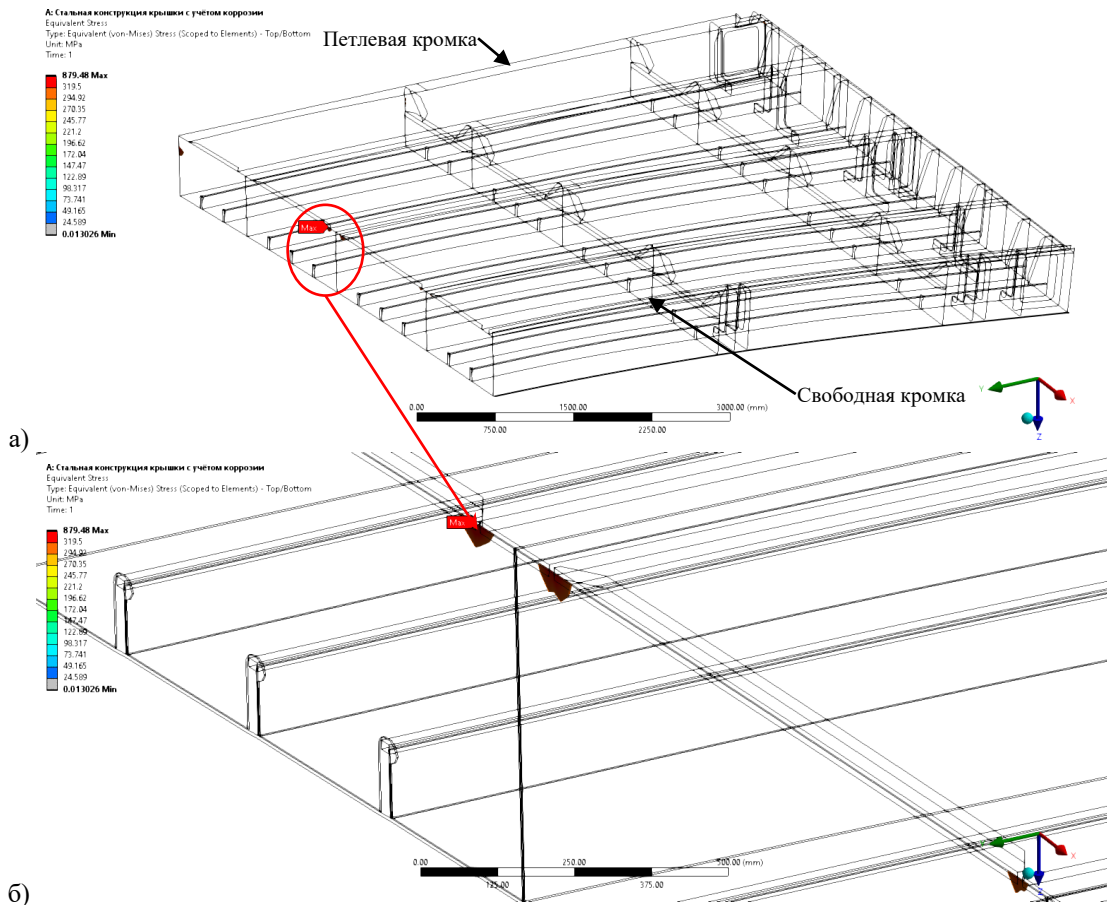


Рис. 3.32 – Превышение допустимых напряжений в исходной стальной конструкции крышки ЛЗ (вид снизу): а) половина конструкции крышки; б) узел пересечения центральной короткой балки с центральной длинной балкой

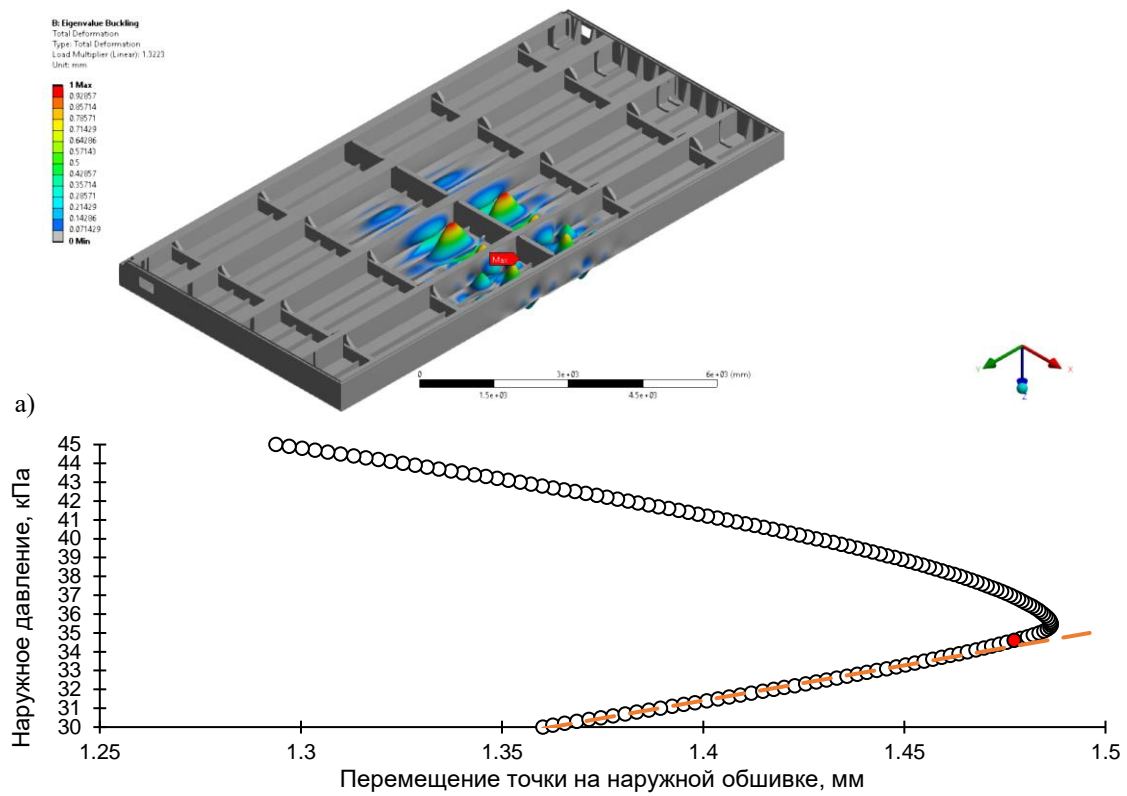


Рис. 3.33 – Проверка устойчивости стальной конструкции крышки ЛЗ: а) первая форма потери устойчивости и соответствующее ей давление  $33,7 \text{ кН/м}^2$  в расчёте линейной устойчивости; б) определение критической нагрузки в расчёте нелинейной устойчивости (● – точка потери устойчивости, которой соответствует критическое давление  $34,5 \text{ кН/м}^2$ )

### 3.2.2 Разработка алюминиевой конструкции крышки

#### 3.2.2.1 Топологическая оптимизация

Задача ТО крышки ЛЗ решалась двумя методами: SIMP (п.1.2.2.2.2) и LS (п.1.2.2.2.3). Область проектирования показана на рис. 3.34б. Она представляет собой параллелепипед, вписанный в габаритные размеры проектируемой крышки. На настил было приложено максимально возможное расчётное давление (см. рис. 3.34а). Оптимизации подвергался весь объём параллелепипеда, за исключением верхней грани, являющейся настилом, воспринимающим нагрузку, и четырёх боковых граней, являющихся сторонами крышки. Целевой функцией являлась податливость конструкции, выполнялась её минимизация. Ограничением выступала масса конструкции (одинаковая для обоих методов). При использовании метода SIMP также было установлено ограничение на максимальный прогиб наружной обшивки, а при оптимизации крышки методом LS это оказалось невозможным, поскольку он не поддерживает ограничений ни по прогибу, ни по напряжениям. Установка ограничения на максимальный прогиб влечёт за собой использование как фактических значений механических свойств алюминиевого сплава 1561 (модуля Юнга и коэффициента Пуассона, см. табл. 3.1), так и фактического значения наружного давления.

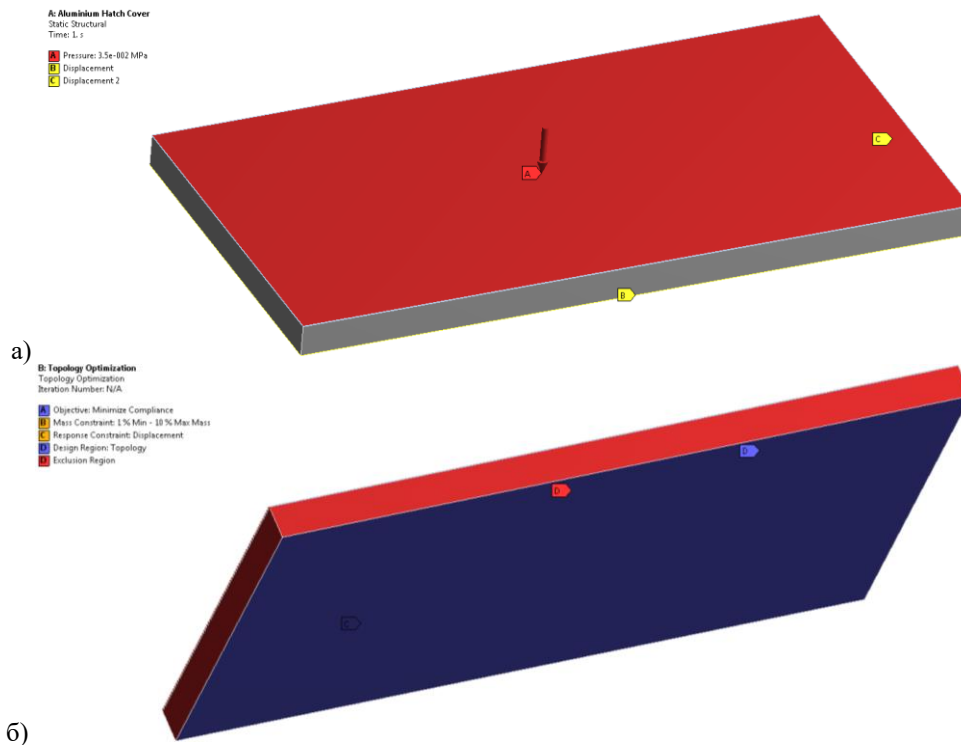


Рис. 3.34 – Постановка задачи ТО алюминиевой крышки ЛЗ: а) давление на настил и закрепление опорных кромок (вид сверху); б) область оптимизации (выделена синим цветом), являющаяся внутренностью параллелепипеда (вид снизу)

Результат ТО алюминиевой крышки, выполненной методом SIMP, показан на рис. 3.35. Как видно, со стороны петлевой кромки образовались ферменные конструкции, тянущиеся в сторону свободной кромки. Также между петлевой кромкой и короткими сторонами «выросли» диагональные фермы, которые вместе с соединяемыми сторонами образуют треугольные контуры, увеличивающие жёсткость крышки. Все образовавшиеся фермы являются пространственными (неплоскими) и имеют раздваивающиеся раскосы. Со стороны свободной кромки образовался мощный пояс, к которому примыкают фермы от петлевой кромки. Этот пояс в углах крышки связывается с настилом и свободной стороной практически сплошными стенками, имеющими небольшие вырезы и идущими под углом к свободной стороне. Вдоль свободной кромки параллельно ей образовалась структура, напоминающая тавровую балку.

На рис. 3.36 показан результат ТО алюминиевой крышки, выполненной методом LS. Поскольку этот метод не поддерживает ограничений ни по прогибам, ни по напряжениям, конструкция получилась более грубой. От всего перекрытия осталась только одна мощная связь около свободной кромки, напоминающая балку. Данное обстоятельство подтверждает результаты ТО методом SIMP и прямым образом указывает на то, что подкрепление в первую очередь должно быть установлено именно в этом месте.

За основу для последующей адаптации и параметрической оптимизации было взято решение, полученное методом SIMP. Его адаптация под технологии, имеющиеся в судостроении, выполнялась путём модификации стальной конструкции крышки. Эта конструкция была

переработана в соответствии с результатами ТО, и были разработаны два адаптированных варианта, показанные на рис. 3.37. В первом варианте (см. рис. 3.37а) вместо поперечных ферм использован поперечный набор, часть из которого, так же как в полученном методом SIMP решении, оканчивается посередине перекрытия. Роль мощного пояска с его опорами выполняют сдвоенные продольные связи у свободной кромки и диагональные связи, их соединяющие. Диагональные связи также использованы для соединения коротких кромок с петлевой, что увеличивает жёсткость опорного контура. Хотя такой вариант пригоден для технологий судостроения, он был переработан во второй, более простой вариант (см. рис. 3.37б). Этот вариант уже не имеет диагональных связей (что замечено снижает трудоёмкость изготовления), они заменены дополнительными продольными связями, а половина поперечных связей выполнена в виде интеркостельных, заканчивающихся на ближайшей продольной связи.

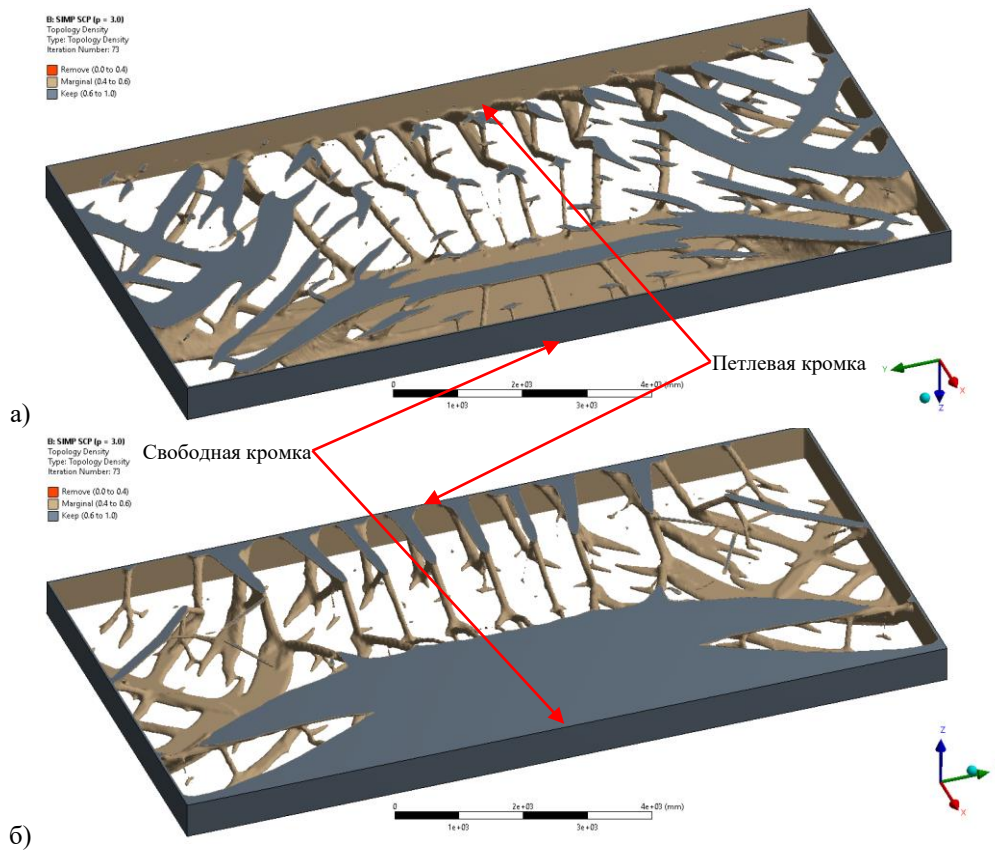


Рис. 3.35 – Результат ТО алюминиевой крышки ЛЗ методом SIMP (настил не показана): а) вид сверху; б) вид снизу

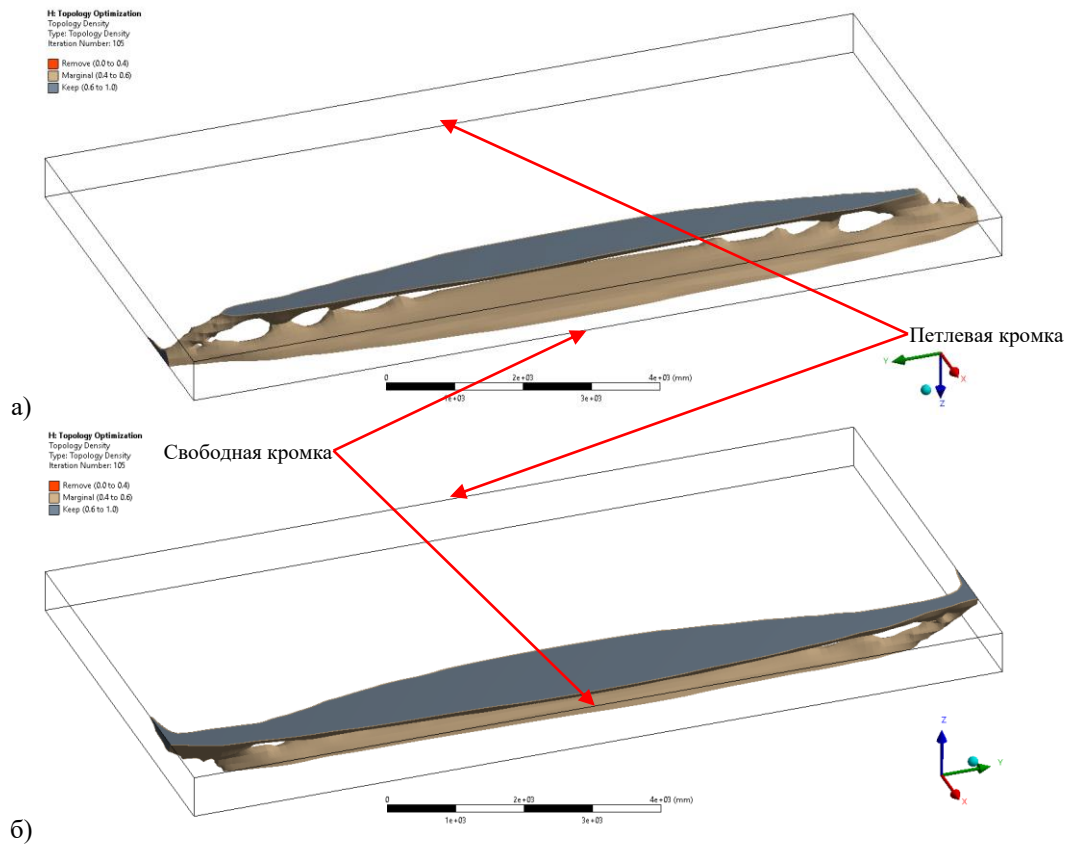


Рис. 3.36 – Результат ТО алюминиевой крышки ЛЗ методом LS (настил и боковые стенки не показаны): а) вид сверху; б) вид снизу

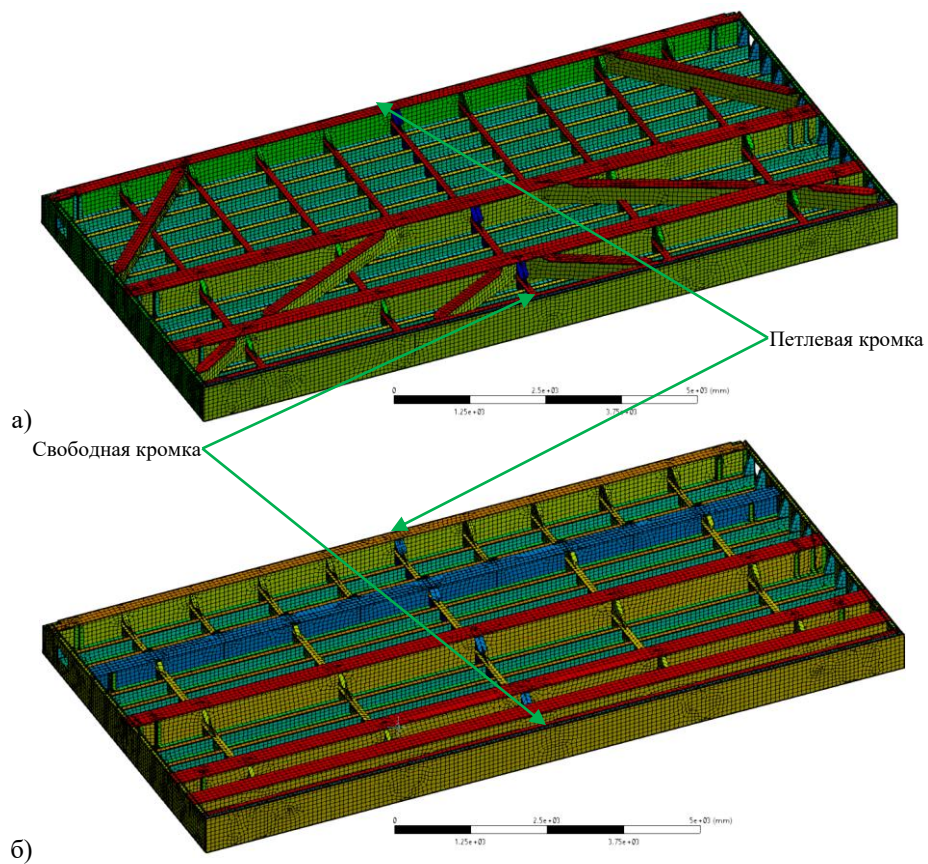


Рис. 3.37 – Конструкции крышек ЛЗ, адаптированные под традиционные технологии судостроения (вид снизу): а) вариант с диагональными связями; б) вариант с интеркостельными связями



### 3.2.2.2 Параметрическая оптимизация

Из двух разработанных вариантов для ПО был выбран второй. Его параметризация выполнялась с помощью балочной идеализации, показанной на рис. 3.38. Все поперечные связи, в том числе интеркостельные, полагались изготовленными из одинакового таврового профиля, все рёбра жёсткости – из одинакового Г-образного профиля (полособульба), все продольные связи, кроме ближайшей к петлевой кромке, – из одинакового таврового профиля. Связи на опорном контуре полагались изготовленными из различных Г-образных профилей, но с фиксированной высотой 620 мм, равной высоте крышки. Толщина наружной обшивки не оптимизировалась и имела фиксированное значение 10 мм. Общее количество параметров составило 11 шт.

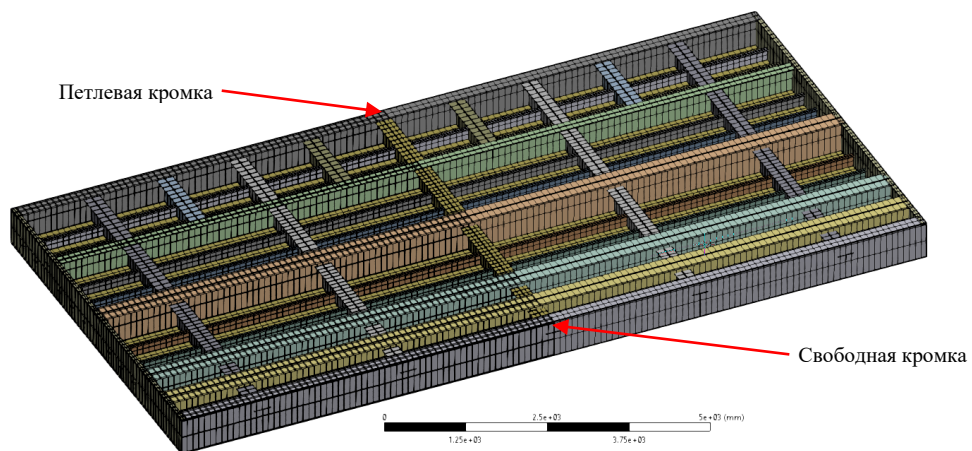


Рис. 3.38 – Балочные идеализации конструкции крышки ЛЗ с интеркостельными связями (вид снизу)

В задаче ПО минимизировалась масса крышки. Изменение высот всех балок допускалось в диапазоне от 40 до 620 мм (полная высота крышки), изменение ширины поясков – от 40 до 330 мм, а изменение всех толщин – в диапазоне от 2 до 40 мм. При этом высота рёбер жёсткости не должна была превышать высоту поперечных связей. Ограничением по жёсткости, как и в случае со стальной крышкой, выступало её максимальное вертикальное перемещение  $u$  (3.5). Ограничением по прочности выступали максимальные значения эквивалентных по Мизесу напряжений  $\sigma_{eq}$  (2.40), которые для алюминиевых конструкций не должны превышать [191]

$$\sigma_{eq} \leq 0,8\sigma_0 = 0,8 \cdot 166,5 = 133,2 \text{ МПа}, \quad (3.6)$$

где  $\sigma_0$  – опасное напряжение:

$$\sigma_0 = K\sigma_y = 0,9 \cdot 185 = 166,5 \text{ МПа}; \quad (3.7)$$

$\sigma_y$  – предел текучести алюминиевого сплава;

$K$  – коэффициент безопасности для сварных конструкций, выполняемых из алюминиевых сплавов, равный 0,9 для сплава 1561.

Также было установлено ограничение на коэффициент запаса по линейной устойчивости, который не должен быть меньше 1,2.

Решение задачи ПО алюминиевой конструкции крышки ЛЗ выполнялось в ПК ANSYS Workbench с помощью метода ASO<sup>1)</sup>, который является сочетанием поверхности отклика кригинга, основанной на планировании эксперимента методом OSF<sup>2)</sup>, с методом MISQP (п.1.2.1.2.3). В результате получена оптимизированная конструкция алюминиевой крышки массой 6450 кг. Результаты проверки её прочности, жёсткости и устойчивости показаны на рис. 3.39, рис. 3.40 и рис. 3.41 соответственно. Как видно, практически вся конструкция крышки находится в пределах допустимых напряжений, за исключением кончиков книц, которые не учитывались при ПО. Максимальный прогиб составил 64,3 мм, что удовлетворяет критерию жёсткости (3.5). Проверка устойчивости, выполненная по алгоритму, описанному в п.2.2.3, показала, что критическая нагрузка не ниже эйлеровой, равной 31,7 кН/м<sup>2</sup>.

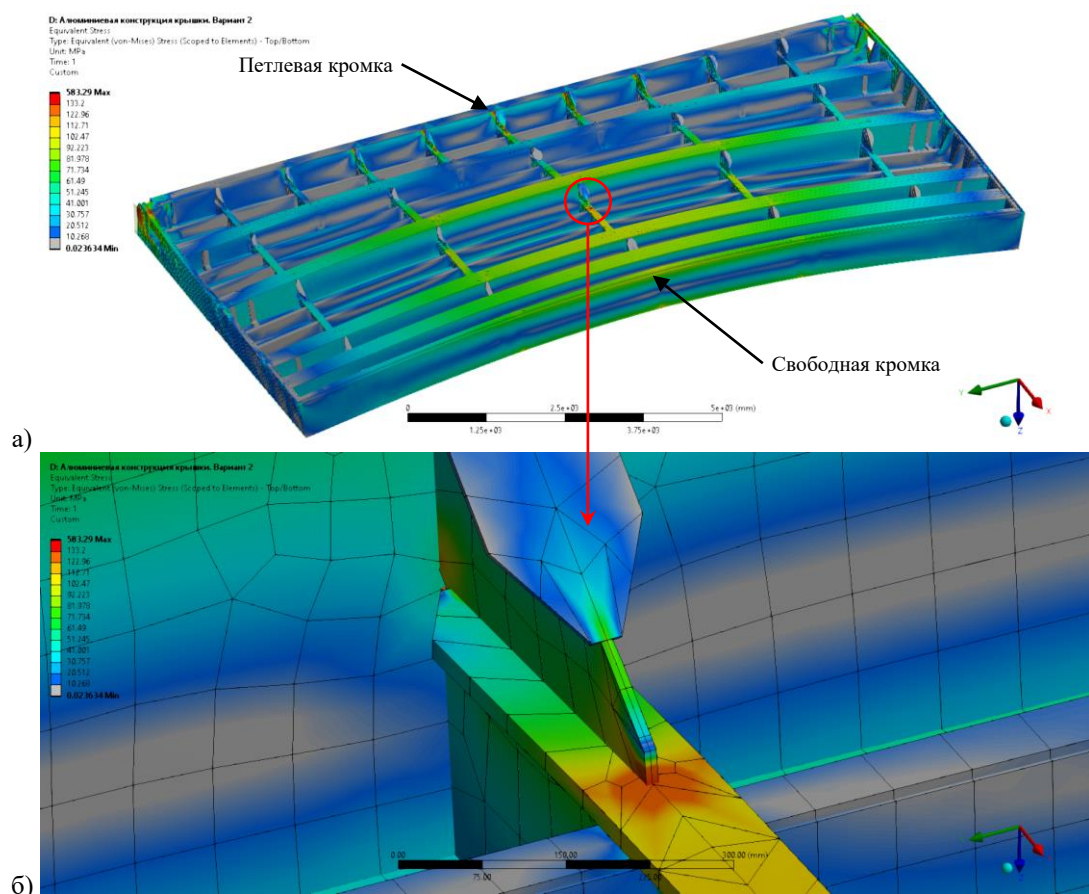


Рис. 3.39 – Оптимизированная по массе алюминиевая конструкция крышки ЛЗ (вид снизу): а) распределение эквивалентных по Мизесу напряжений; б) локальная концентрация напряжений на кончиках книц

<sup>1)</sup> Adaptive single-objective, адаптивный одноцелевой метод.

<sup>2)</sup> Optimal space filling, оптимальное заполнение пространства.

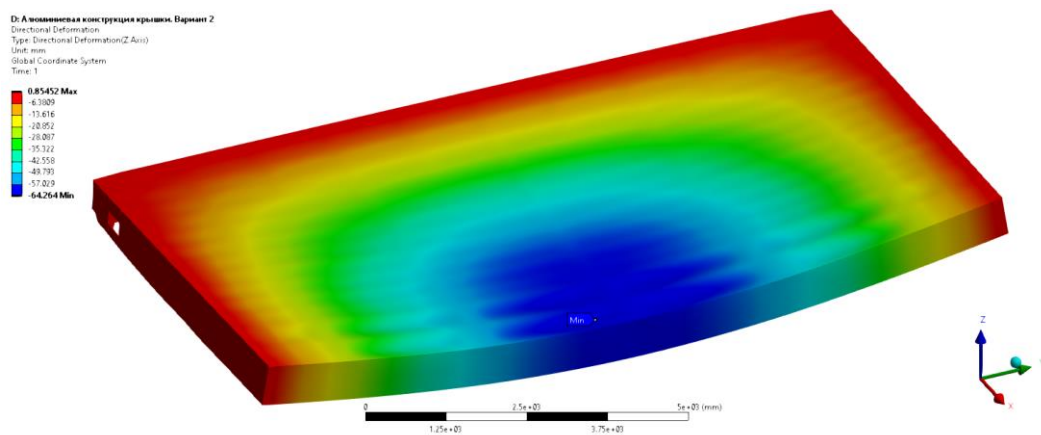


Рис. 3.40 – Оптимизированная по массе алюминиевая конструкция крышки ЛЗ (вид сверху). Распределение вертикальных перемещений

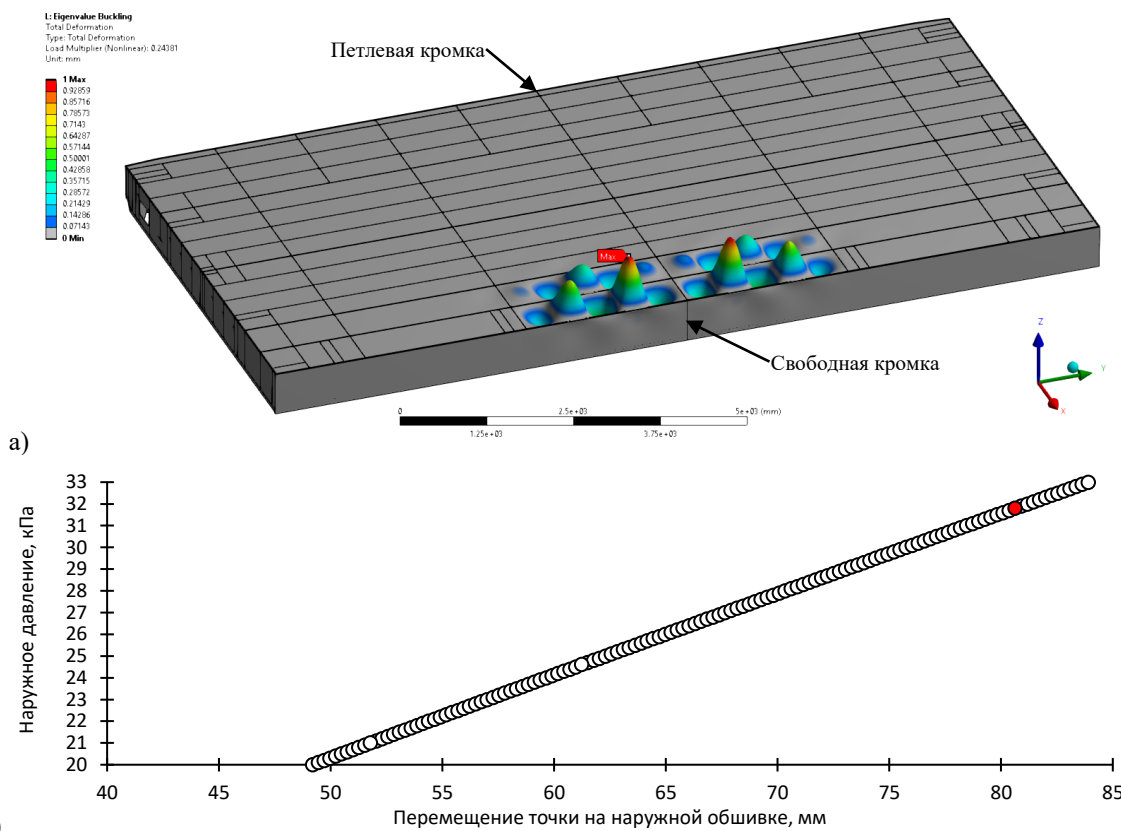


Рис. 3.41 – Проверка устойчивости оптимизированной по массе алюминиевой конструкции крышки ЛЗ: а) первая форма потери устойчивости и соответствующее ей давление 31,725 кН/м<sup>2</sup>; б) выявление критической нагрузки (● – точка, соответствующая эйлеровой нагрузке потери устойчивости)

### 3.2.2.3 Оптимизация формы

С целью устранения концентрации напряжений на кончиках книц они были выполнены с радиусным переходом. Дополнительно был сделан радиусный сбеги поясков «на ус» вместо треугольного. На рис. 3.42 показаны области с превышением допускаемых напряжений до выполнения ОФ, а на рис. 3.43 – после выполнения ОФ. Как видно, пиковые значения напряжений на кончиках книц до ОФ составляли 336 МПа (что превышает предел текучести 185 МПа), а после – 166 МПа. Таким образом, за счёт ОФ удалось перевести работу конструкции из области МаЦУ в область МнЦУ. При этом итоговая масса конструкции составила 6510 кг.

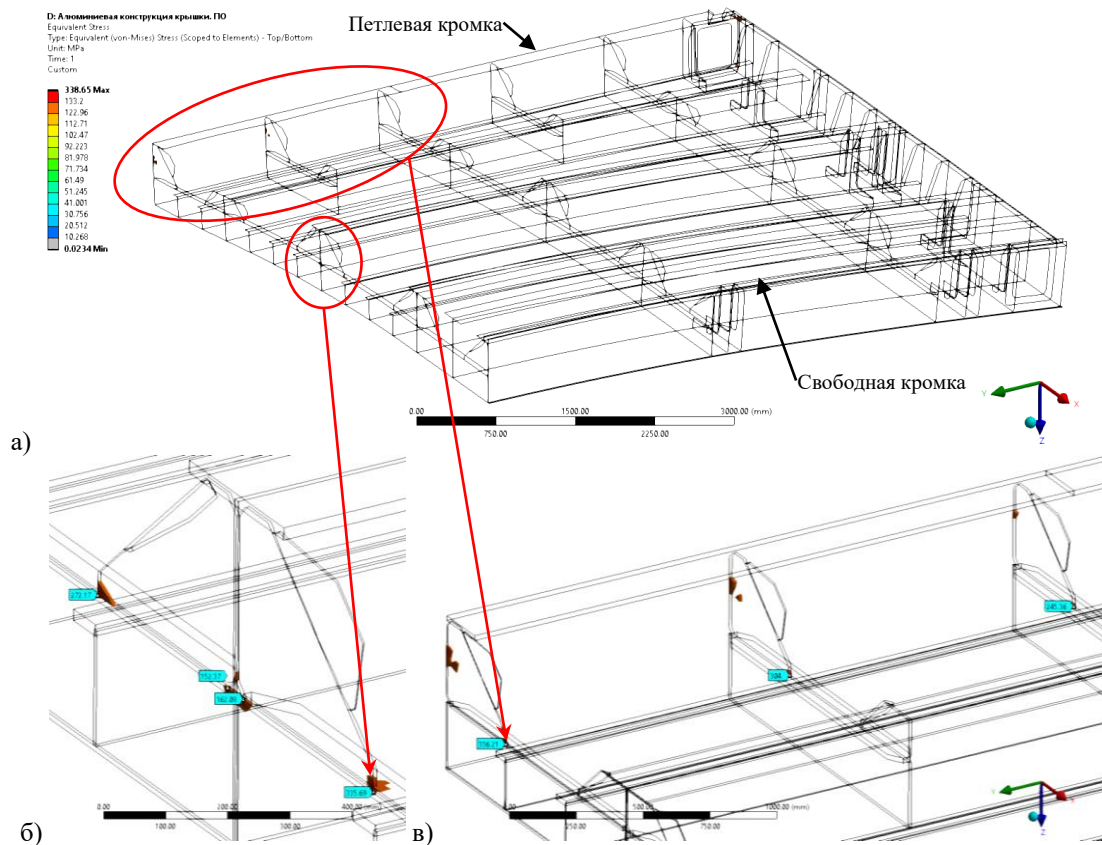


Рис. 3.42 – Локальное превышение допустимых напряжений в алюминиевой конструкции крышки ЛЗ до выполнения ОФ (вид снизу): а) половина конструкции крышки; б) узел пересечения центральной короткой балки с центральной длинной балкой; в) узлы притыкания коротких балок к опорной связи на петлевой кромке

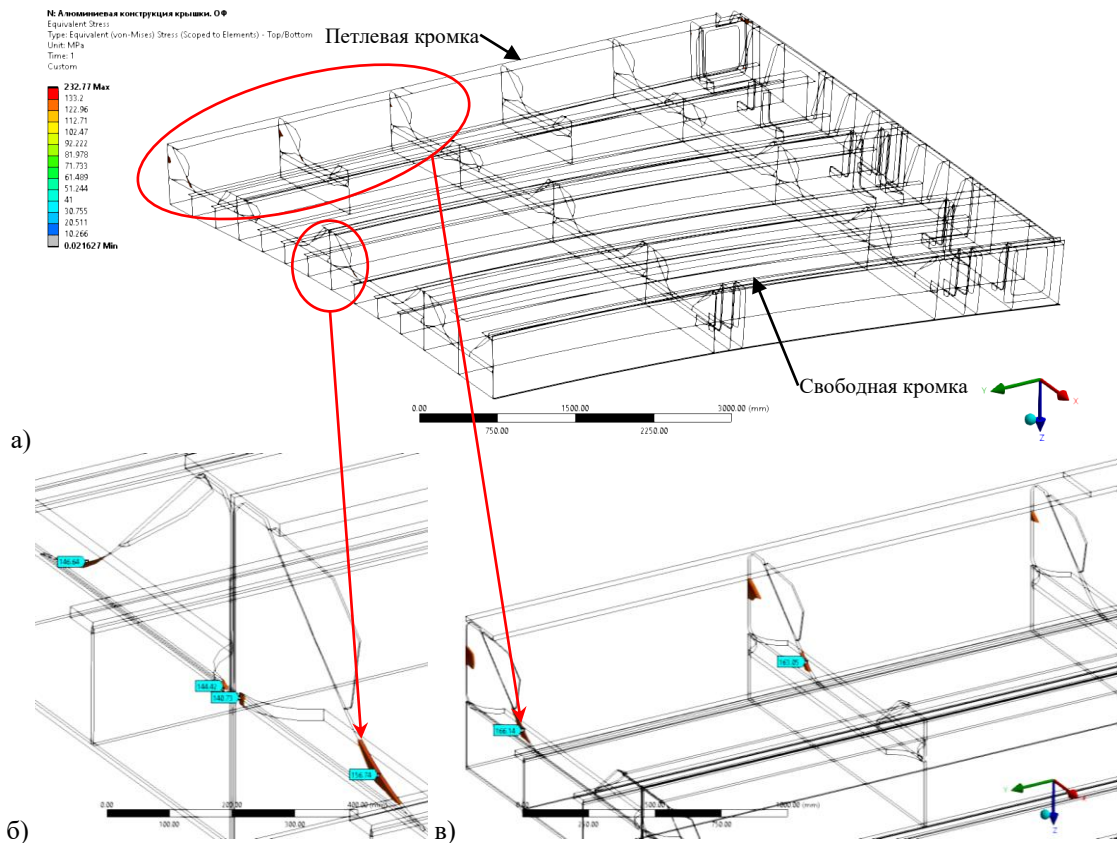


Рис. 3.43 – Локальное превышение допустимых напряжений в алюминиевой конструкции крышки ЛЗ после выполнения ОФ (вид снизу): а) половина конструкции крышки; б) узел пересечения центральной короткой балки с центральной длинной балкой; в) узлы притыкания коротких балок к опорной связи на петлевой кромке

### 3.2.3 Оценка эффективности разработанной алюминиевой конструкции крышки

В табл. 3.8 приведены результаты расчётов оптимизированных алюминиевой и стальной, а также исходной стальной конструкций крышки ЛЗ. Как видно, алюминиевая крышка оказалась более чем в 2 раза легче исходной стальной, что при её использовании приводит, во-первых, к снижению массы корпусных конструкций, влекущему за собой увеличение грузоподъемности судна, и, во-вторых, к применению более дешёвых откидных устройств. При этом максимальные концентрационные напряжения в алюминиевой крышке, в отличие от исходной стальной, не превосходят предела текучести, что позволяет гарантировать ресурс алюминиевой крышки на требуемом уровне. Экономические расчёты показали, что разработанная алюминиевая конструкция в производстве оказалась даже дешевле исходной стальной. По результатам данной работы получен патент на изобретение № 2724042 от 18.06.2020.

Табл. 3.8 – Сопоставление стальной и алюминиевой конструкций крышки ЛЗ

Параметр	Исходная стальная крышка (РС D/D36)	Оптимизированная стальная крышка (РС D/D36)	Алюминиевая крышка (1561)
Масса, кг (без учёта/с учётом кор.надбавки)	10 830/13 630	7 000/9 450	6 510
Максимальный прогиб, мм	50,4	35,0	64,3
Коэффициент концентрации напряжений $K_\sigma = \sigma_{max}/\sigma_{доп}$	2,75	1,10	1,25
Коэффициент запаса по нагрузке $\lambda^H$	1,35	1,08	$\geq 1,24$

### 3.2.4 Рекомендации по конструктивному оформлению крышек люковых закрытий

Решения, полученные в процессе оптимизации, говорят о целесообразности увеличения изгибной жёсткости балок, параллельных свободным кромкам и находящихся вблизи них. При этом наличие большой изгибной жёсткости у балок, имеющих не более одного конца на опорном контуре, нецелесообразно (как это наблюдается у центральной короткой балки исходной стальной крышки). Для снижения концентрации напряжений в узлах пересечений балок рекомендуется у книц и поясков выполнять сбеги «на ус» по радиусу, как это выполнено на рис. 3.43б,в. Формирование радиусного сбегания возможно по примеру кончиков ПЭ, показанных на рис. 3.28.

## 3.3 Усиление ледового пояса морской ледостойкой стационарной платформы

Морские ледостойкие стационарные платформы (МЛСП) в процессе своей работы могут испытывать значительные ледовые нагрузки. При воздействии экстремальных ледовых нагрузок допускается появление пластических деформаций в ледовом поясе. Пластические деформации характеризуются как заметным изменением формы несущих конструкций, так и изменением их взаимного расположения, что может негативно отразиться на работоспособности оборудования МЛСП. Последнее напрямую отвечает за безопасность эксплуатации МЛСП. Таким образом, возникает задача максимизации жёсткости и несущей способности ледового пояса при

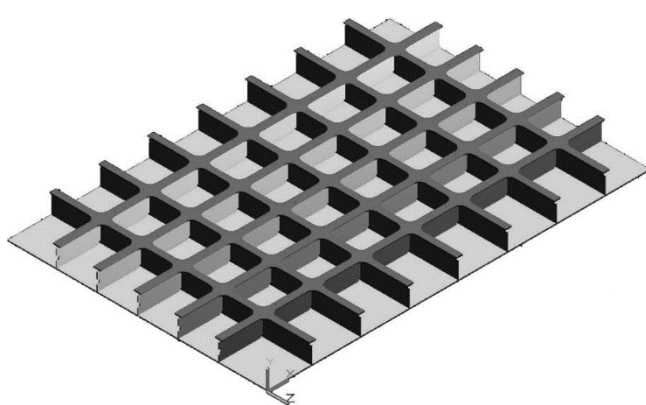
ограничениях по массе, прочности и устойчивости. Решение подобной задачи возможно с применением параметрической оптимизации.

### 3.3.1 Прочность традиционной конструкции перекрытия ледового пояса

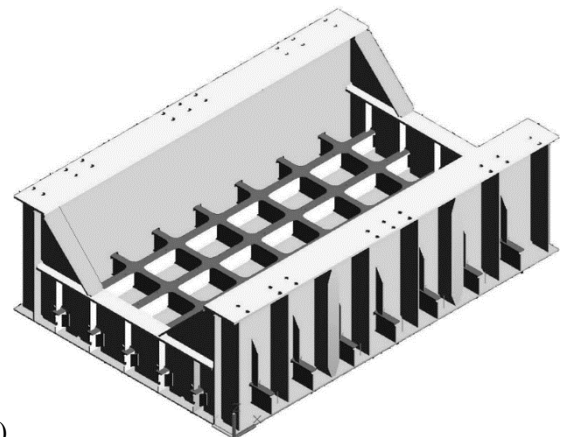
В качестве прототипа была выбрана конструкция ледового пояса, показанная на рис. 3.44. Её геометрические характеристики представлены в табл. 3.9. Основной набор выполнен сварным, свободный поясок непрерывный на всём пролёте и имеет расширения для приварки поясков перекрёстного набора. Заделка выполнена в части передачи перерезывающей силы, т.е. на контуре имитируется свободная опора.

Табл. 3.9 – Геометрические характеристики традиционной конструкции ледового пояса МЛСП

Параметр		Значение
Размеры опорного контура $a \times b$ , мм		2780×4770
Толщина наружной обшивки $s$ , мм		20
Основной (короткий) набор	сечение, мм	T 250×80×10×14
	пролёт, мм	2780
	шпация, мм	640
Перекрёстный (длинный) набор	сечение, мм	T 250×92×10×14
	пролёт, мм	4770
	шпация, мм	530



а)



б)

Рис. 3.44 – Традиционная конструкция перекрытия ледового пояса МЛСП (вид изнутри): а) наружная обшивка и набор; б) перекрытие с опорным контуром

#### 3.3.1.1 Статические испытания

Статические прочностные испытания традиционной конструкции ледового пояса МЛСП проводились на испытательной машине МУГ-3000. Имитировалось воздействие на конструкцию ледовой нагрузки (см. рис. 3.45). Давление на заданную область прикладывалось через индентор, состоящий из стальной обоймы и деревянного заполнителя, непосредственно контактирующего с наружной поверхностью обшивки перекрытия (см. рис. 3.46). Заполнитель был образован четырьмя рядами деревянных брусьев сечением 100×100 мм, уложенными крест-накрест (первый и третий ряды – по 7 брусьев вдоль обоймы, второй и четвертый – по 29 брусьев поперёк обоймы). Два верхних ряда брусьев крепились в обойме шурупами.



Рис. 3.45 – Схема закрепления и нагружения конструкции перекрытия ледового пояса МЛСП: а) план с внешней стороны обшивки; б) вид сбоку

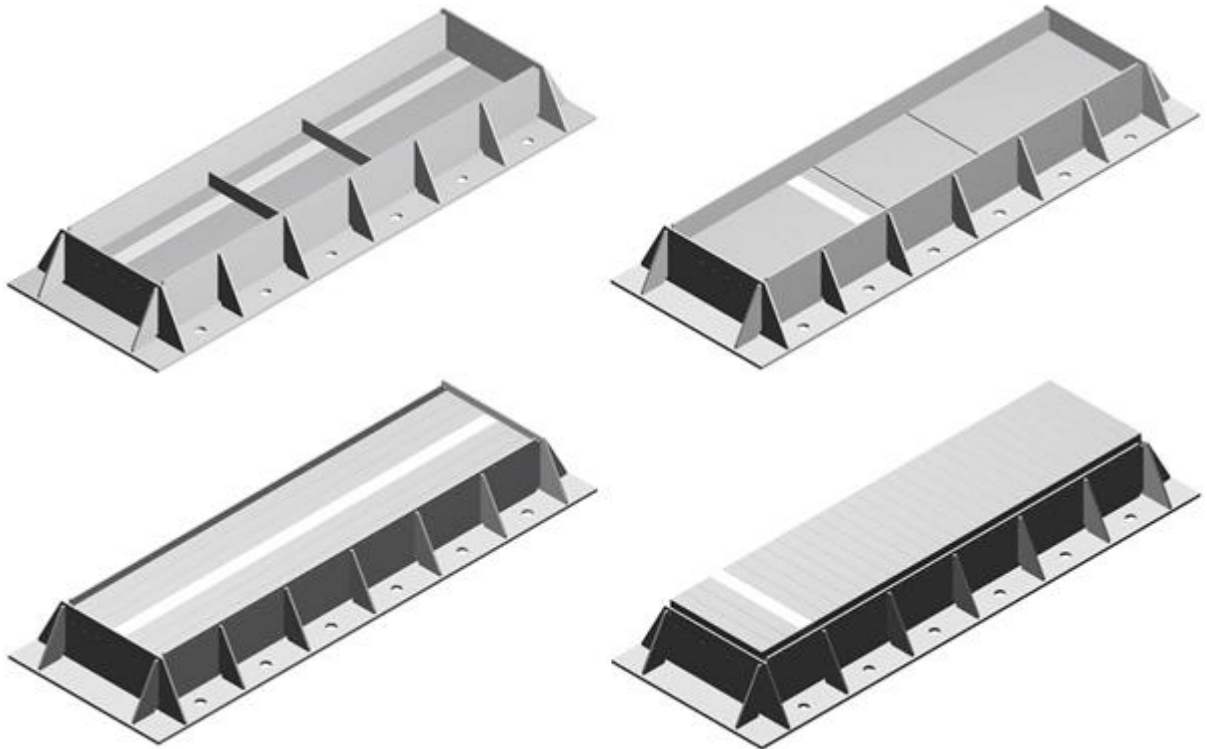


Рис. 3.46 – Индентор. Схема укладки деревянных брусьев

Индентор был установлен на подвижную плиту машины МУГ-3000, а конструкция ледового пояса МЛСП – на опорную плиту (см. рис. 3.47). Нагружение происходило ступенчато в два этапа (см. рис. 3.48). На первом этапе нагрузка нарастала от 300 до 4 500 кН с шагом 300 кН, после чего был выполнен сброс нагрузки до 600 кН. На втором этапе нагрузка нарастала от 4 800 до 7 000 кН с шагом 200 кН. При нагрузке 7 000 кН была зафиксирована потеря несущей способности перекрытия.

В результате испытаний часть сварных швов, соединяющих пояски набора, была разорвана уже на первом этапе нагружения, что сопровождалось характерными хлопками (см. рис. 3.51, табл. 3.10). Помимо указанных разрушений повсеместно наблюдались надрывы окончаний подкрепляющих книц в опорных сечениях балок, а также срез сварных швов, соединяющих стенки горизонтальных балок с опорным контуром (см. рис. 3.52).

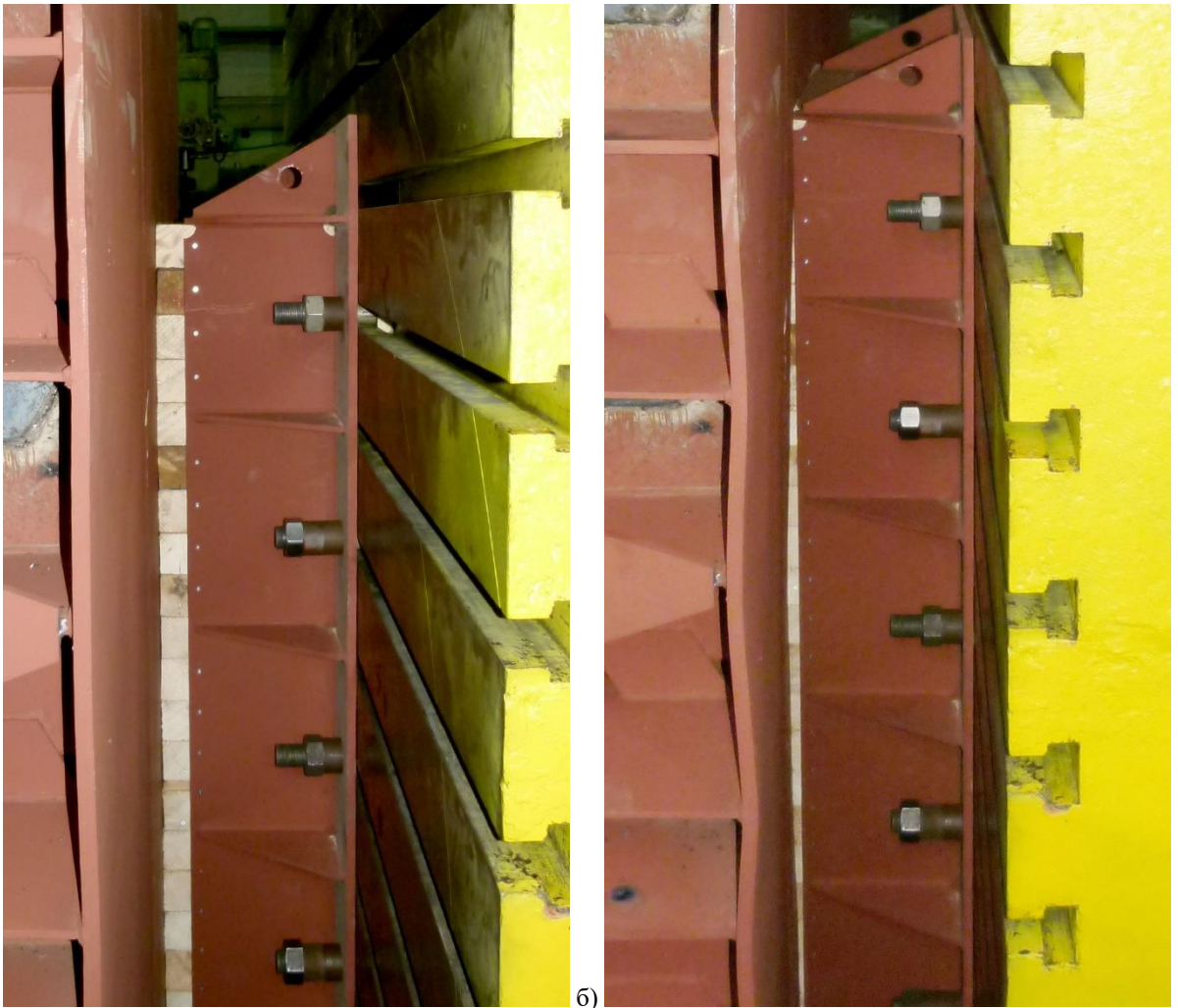


а) б)  
Рис. 3.47 – Установка индентора (а) и традиционной конструкции ледового пояса (б) на машину МУГ-3000



Рис. 3.48 – Диаграмма нагружения традиционной конструкции ледового пояса МЛСП





а) б)  
Рис. 3.49 – Начальное обжатие индентора при нагрузке 300 кН (а) и деформированное состояние при нагрузке 6200 кН (б), где видно коробление наружной обшивки



Рис. 3.50 – Деформированное состояние традиционной конструкции ледового пояса МЛСП при нагрузке 6600 кН

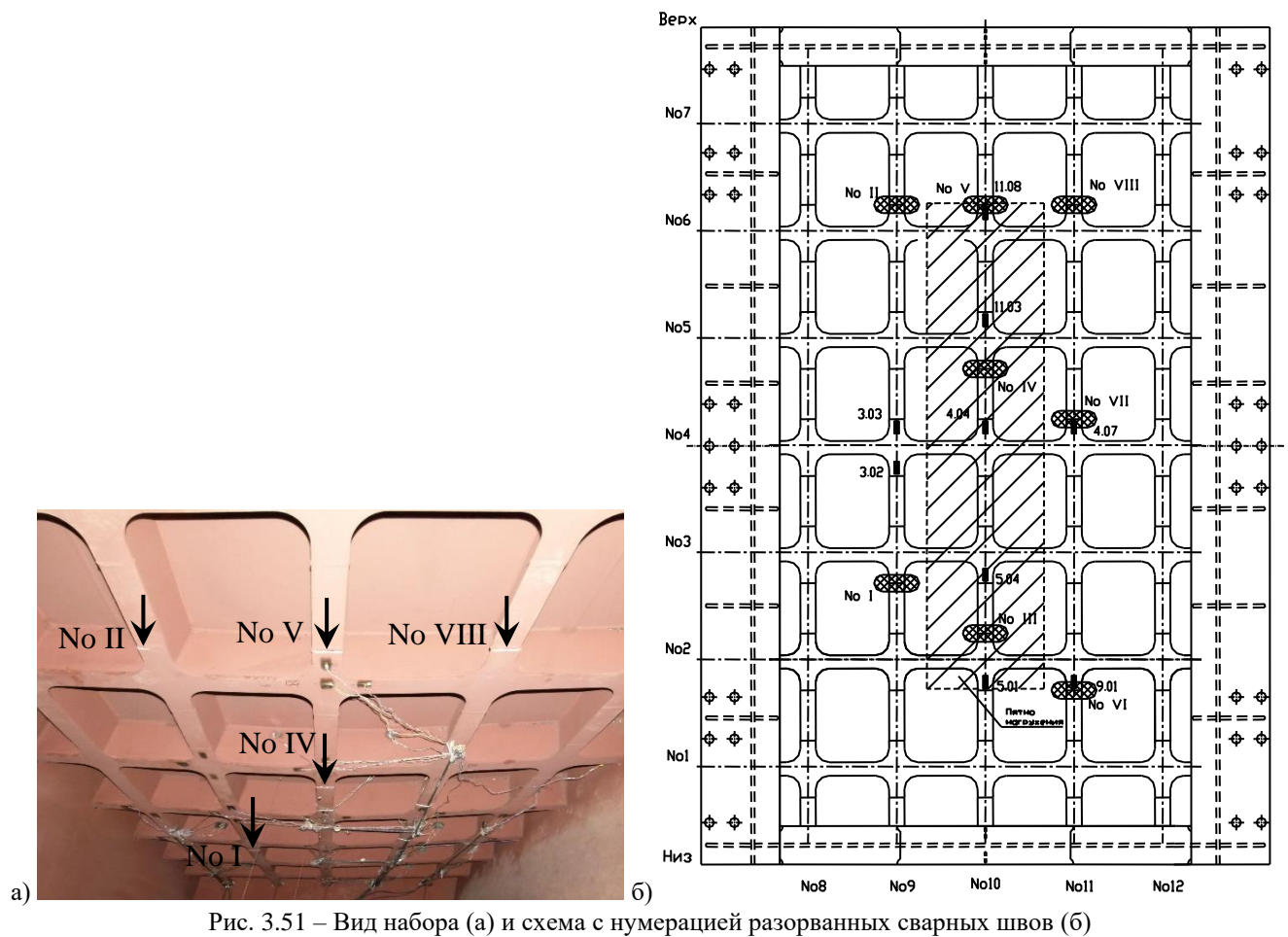


Рис. 3.51 – Вид набора (а) и схема с нумерацией разорванных сварных швов (б)

Табл. 3.10 – Последовательность разрушения традиционной конструкции ледового пояса МЛСП

Номер сварного шва	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Разрушающая нагрузка, кН	5 800	5 600	5 600	4 200	6 200	5 800	4 200	~5 600

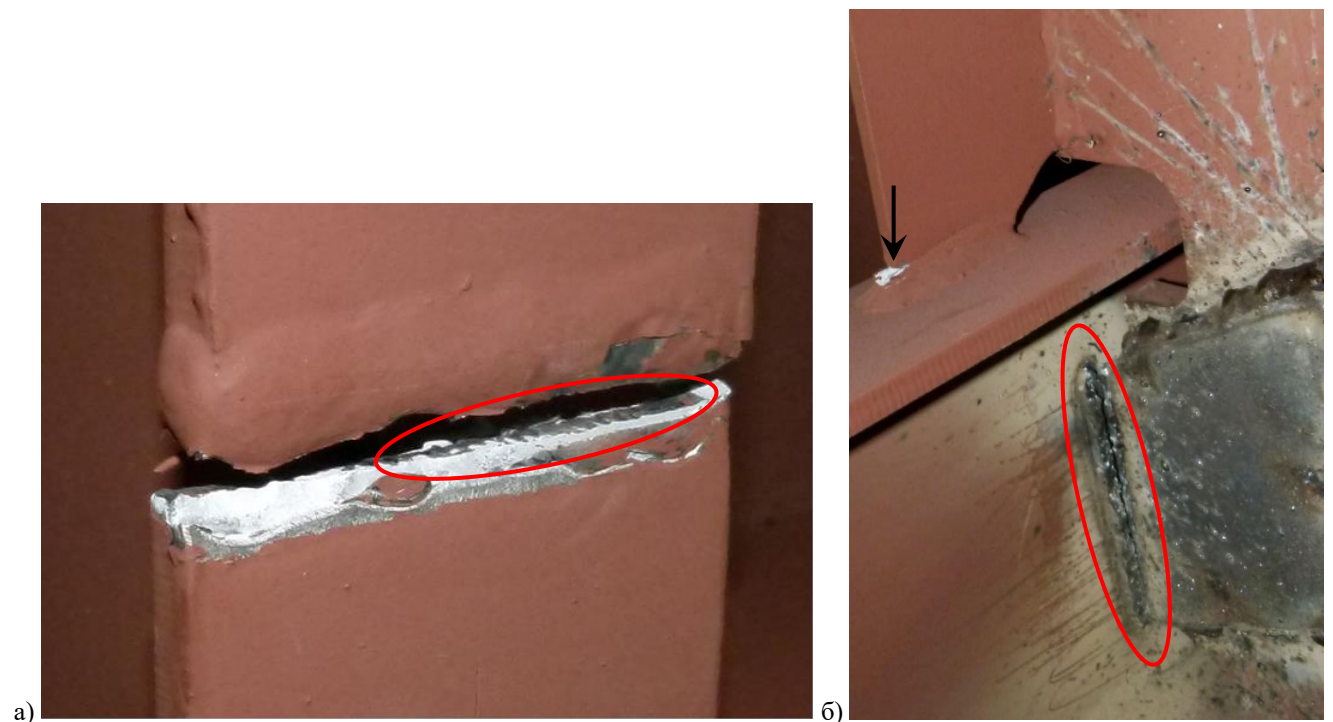


Рис. 3.52 – Типовые разрушения: а) разрыв сварного шва на пояске (виде непровар); б) отрыв книц опорного контура от поясков коротких балок и срез сварных швов

### 3.3.1.2 Оценка прочности численными методами

С целью проверки отсутствия технологического брака и корректности полученных результатов статических испытаний выполнялось численное моделирование всего процесса испытаний. Была создана КЭ модель четверти перекрытия ледового пояса и нагружающего индентора, заполненного деревянными брусками, моделируемыми трансверсально изотропным материалом (см. рис. 3.53). В соответствующих плоскостях были наложены условия симметрии.

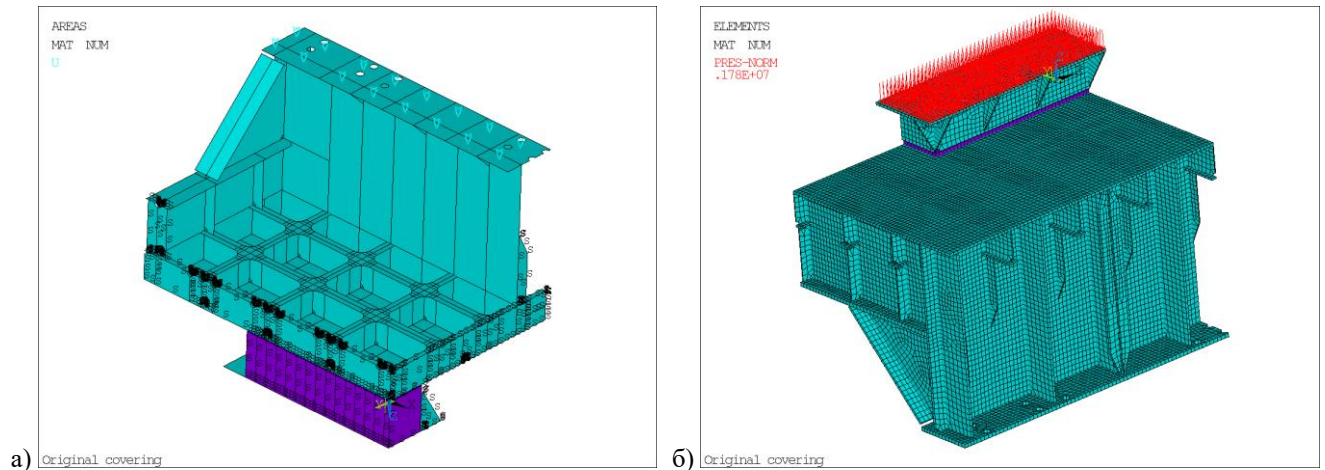


Рис. 3.53 – Геометрическая (а) и КЭ (б) модели традиционной конструкции ледового пояса МЛСП

Конструкция перекрытия и стальной обшивки моделировались оболочечными конечными элементами второго порядка типа **SHELL281**. Все металлические конструкции были выполнены из стали марки СтЗсп-5, свойства которой описывались линейной изотропной моделью в упругой области и моделью линейного кинематического упрочнения в пластической области (см. табл. 3.11).

Табл. 3.11 – Механические свойства стали СтЗсп-5

Параметр	Значение
Модуль Юнга $E$ , МПа	210 000
Коэффициент Пуассона $\nu$	0,3
Плотность $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	7850
Предел текучести $\sigma_y$ , МПа	290
Предел прочности $\sigma_u$ , МПа	435
Относительное удлинение образца при разрыве $\delta_c$ , %	25
Относительное сужение образца при разрыве $\psi_c$ , %	60
Касательный модуль $E_T$ , МПа	2022

Деревянные бруска, заполняющие индентор, моделировались объёмными конечными элементами второго порядка типа **SOLID186**. Бруска были изготовлены из сосны, свойства которой описывались упругой линейной ортотропной моделью в цилиндрической системе координат (см. табл. 3.12).

Для моделирования нагружения перекрытия индентором были созданы контактные пары, описывающие взаимодействие деревянных брусков как между собой, так и с наружной обшивкой перекрытия и со стальной обшивкой индентора (см. рис. 3.54).

Табл. 3.12 – Механические свойства сосны

Параметр	Значение
Модуль упругости $E_r$ , МПа	19,6
Модуль упругости $E_\phi$ , МПа	49
Модуль упругости $E_z$ , МПа	1150
Коэффициент Пуассона $\nu_{r\phi}$	0,03
Коэффициент Пуассона $\nu_{\phi z}$	0,49
Коэффициент Пуассона $\nu_{rz}$	0,03
Модуль сдвига $G_{r\phi}$ , МПа	696
Модуль сдвига $G_{\phi z}$ , МПа	10
Модуль сдвига $G_{rz}$ , МПа	1118
Плотность $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	510

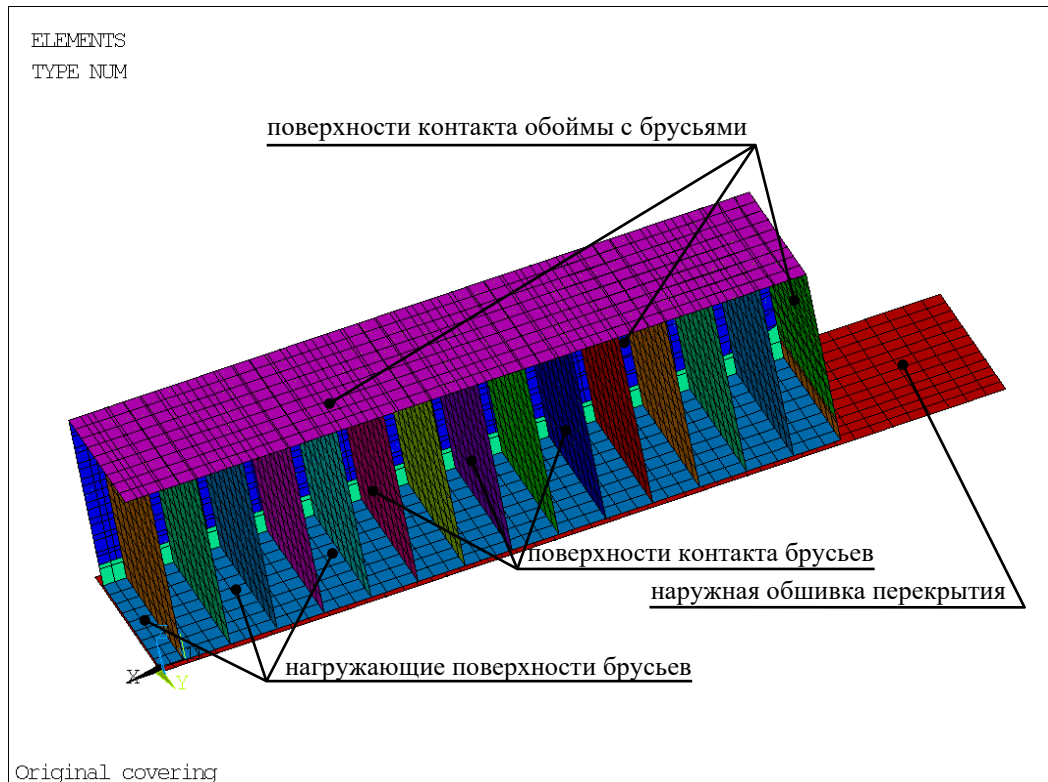


Рис. 3.54 – Контактные пары, описывающие взаимодействие деревянных брусьев как между собой, так и наружной обшивкой перекрытия и со стальной облоймой индентора

Для всех контактных пар использовался изотропный закон трения Кулона – Амонтона с коэффициентом трения покоя  $\mu_s = 0,6$  и коэффициентом трения скольжения  $\mu_d = 0,3$ . При этом максимальное касательное напряжение трения было задано на уровне  $\tau_{max} = 7$  МПа, что соответствует пределу прочности сосны на скалывание вдоль волокон.

Нагружение происходило путём приложения к внешней поверхности индентора равномерного давления, ступенчато изменяющегося согласно диаграмме нагружения конструкции, показанной на рис. 3.48.

Для условного учёта разрушения отдельных частей конструкции после решения каждого шага нагружения деактивировались КЭ с эквивалентными по Мизесу напряжениями, превышающими предел прочности  $\sigma_u$ , который был принят в качестве критического напряжения в связи с большими размерами КЭ (~50 мм), более чем на порядок превосходящими размер

структурного элемента  $d \approx 2,5$  мм. Понижающий коэффициент жёсткости составлял 0,001.

В ходе решения задачи был подтверждён отрыв книц опорного контура от коротких балок (см. рис. 3.55). Однако даже при максимальной нагрузке напряжения в поясках не превысили критических значений (см. рис. 3.56 и рис. 3.57), что вкупе с зафиксированным некачественным выполнением сварных швов (см. рис. 3.52а) говорит о наличии брака в технологическом процессе. Отчасти этот брак обусловлен односторонней разделкой кромок, а двусторонняя разделка кромок при имеющемся конструктивном оформлении невозможна.

Также была выявлена существенная неравномерность распределения контактных давлений (см. рис. 3.58), связанная с изгибом наружной обшивки и балок набора в процессе нагружения.

В качестве интегральной оценки сходимости результатов расчёта и эксперимента был выбран прогиб в центре перекрытия. Как можно видеть из сопоставления диаграмм прогибов, показанных на рис. 3.59, основное расхождение между расчётом и экспериментом наблюдается после нагрузки 3 900 кН, когда в эксперименте начинает происходить разрыв сварных швов на поясках балок, не наблюдаемый в расчёте. Погрешность оценивалась с помощью  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_\infty$  норм:

$$\delta_1 u = \frac{\|u_{\text{эксп}}\|_1 - \|u_{\text{расч}}\|_1}{\|u_{\text{эксп}}\|_1} = 3,0\%, \quad (3.8)$$

$$\delta_2 u = \frac{\|u_{\text{эксп}}\|_2 - \|u_{\text{расч}}\|_2}{\|u_{\text{эксп}}\|_2} = 6,7\%, \quad (3.9)$$

$$\delta_\infty u = \frac{\|u_{\text{эксп}}\|_\infty - \|u_{\text{расч}}\|_\infty}{\|u_{\text{эксп}}\|_\infty} = 2,7\%, \quad (3.10)$$

где  $\|u\|_p$  –  $L_p$  норма прогиба:

$$\|u\|_p = \begin{cases} \left( \int_{F_{\min}}^{F_{\max}} |F(u)|^p du \right)^{1/p} & p \neq \infty, \\ \max|u| & p = \infty. \end{cases} \quad (3.11)$$

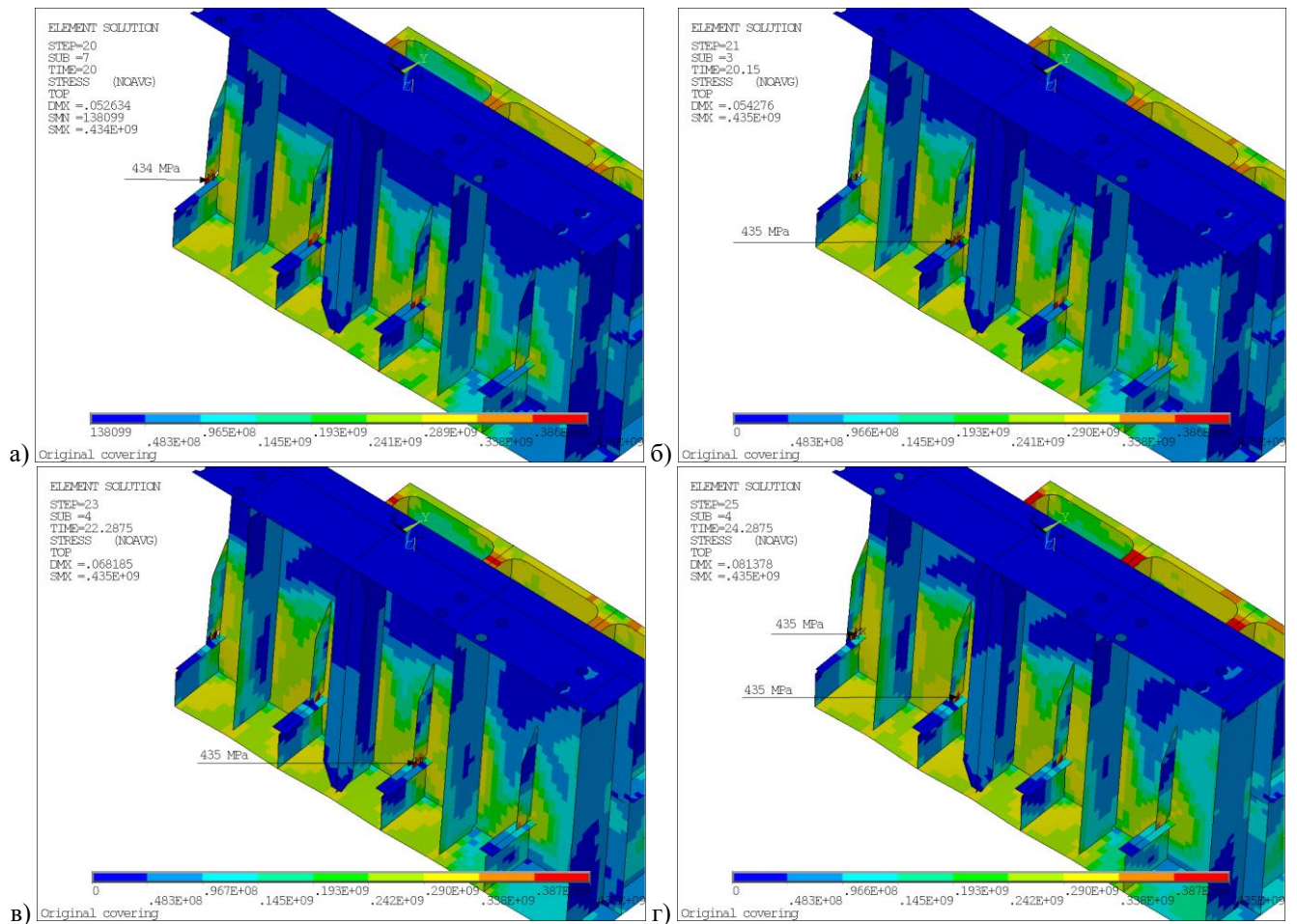


Рис. 3.55 – Развитие отрыва книц на опорном контуре от коротких балок: а) 5400 кН; б) 5430 кН; в) 5860 кН; г) 6260 кН

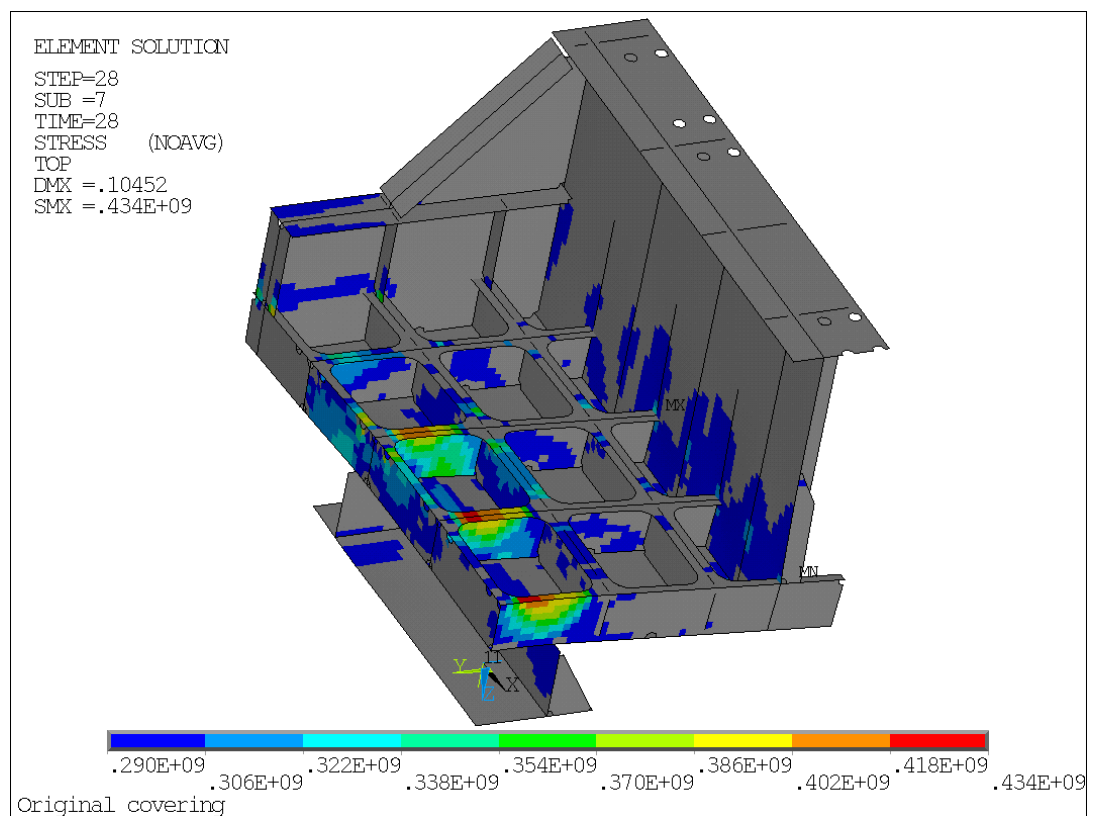


Рис. 3.56 – Распределение эквивалентных по Мизесу напряжений в металлических конструкциях на последнем шаге нагружения (серым цветом показаны КЭ с напряжением ниже предела текучести)

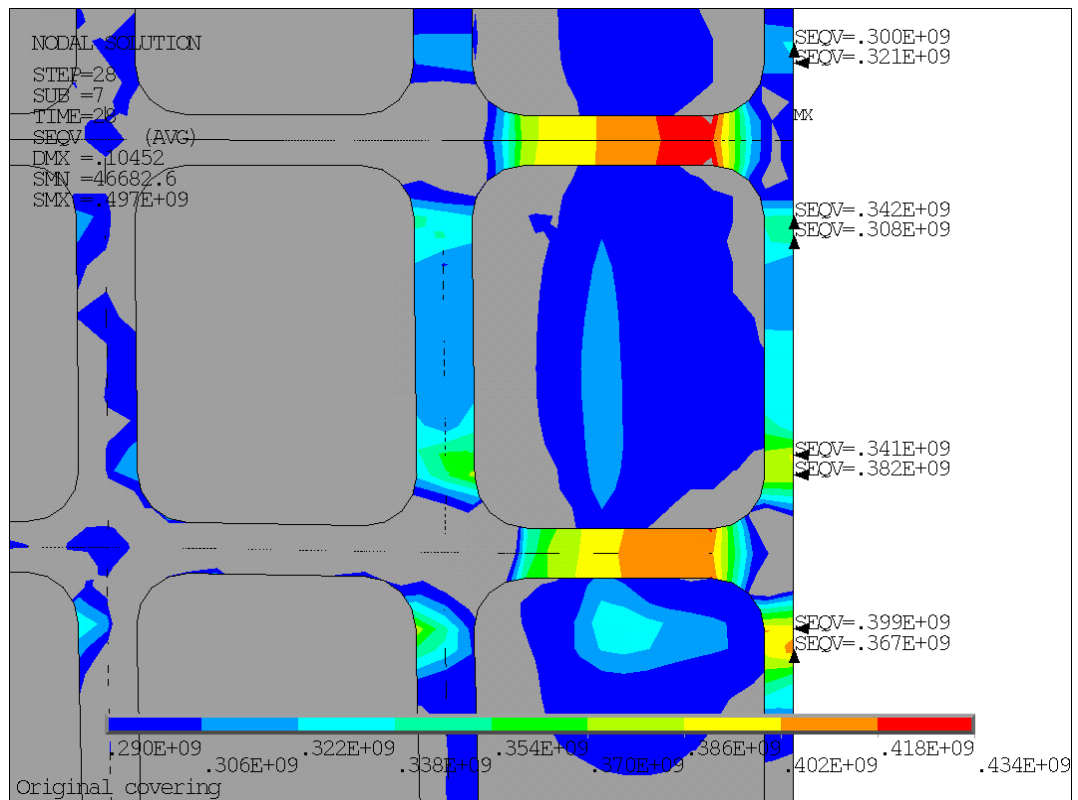


Рис. 3.57 – Распределение эквивалентных по Мизесу напряжений в зоне стыка балок на последнем шаге нагружения (серым цветом показаны КЭ с напряжением ниже предела текучести)

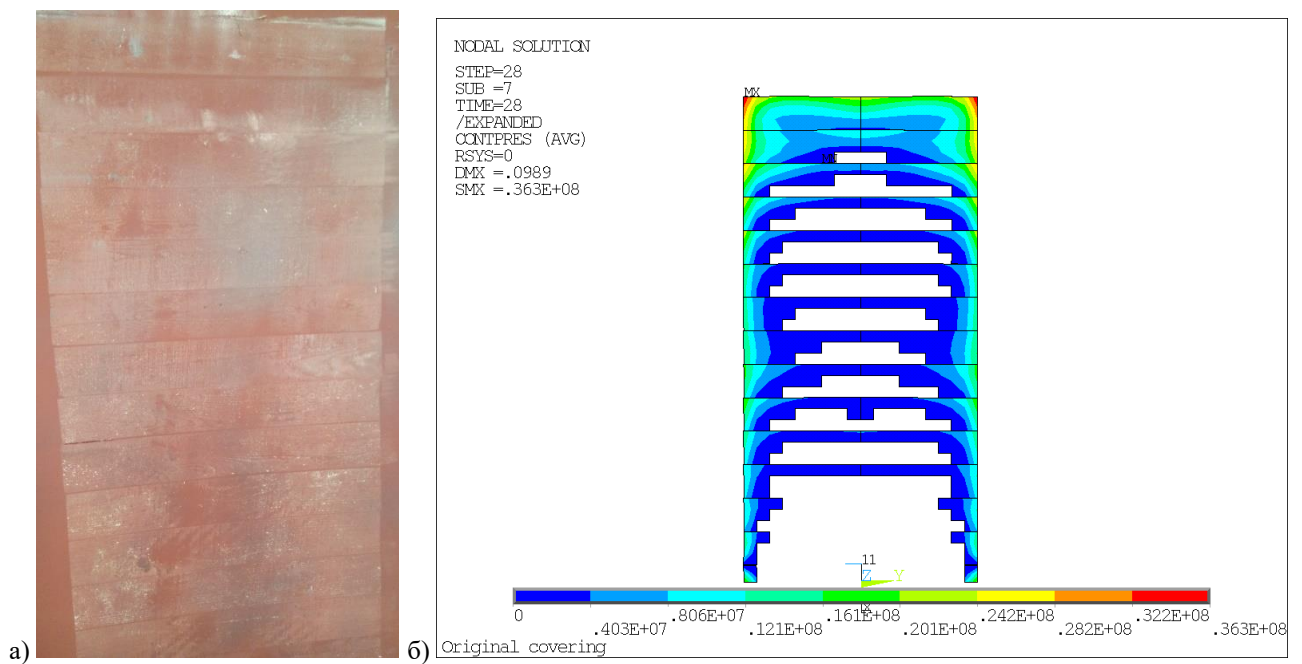


Рис. 3.58 – а) Отпечаток деревянных брусьев на наружной обшивке после испытаний; б) Распределение контактных давлений на последнем шаге нагружения

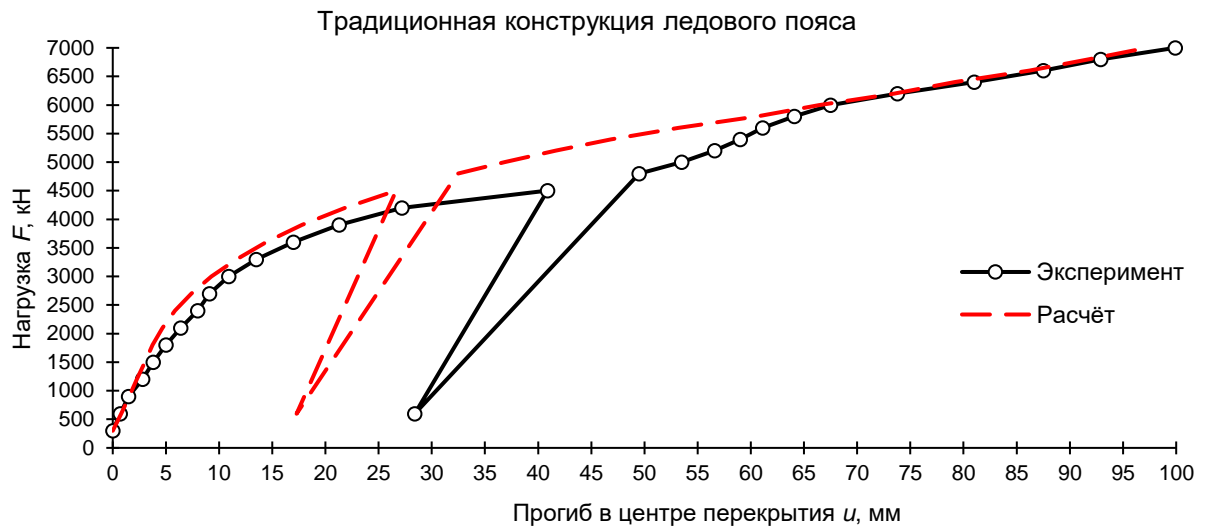


Рис. 3.59 – Диаграмма деформирования традиционной конструкции ледового пояса МЛСП

### 3.3.2 Параметрическая оптимизация перекрытия ледового пояса

Выполнение ПО перекрытия ледового пояса производилось в среде ANSYS Mechanical APDL. Были разработаны командные файлы (см. приложение А), с помощью которых решалась задача минимизации прогиба в центре перекрытия

$$u(\{x\}) \rightarrow \min_{\{x_{down}\} \leq \{x\} \leq \{x_{up}\}} \quad (3.12)$$

при ограничении на объём материала

$$V(\{x\}) \leq V_{max}. \quad (3.13)$$

В командных файлах создавалась КЭ модель четверти перекрытия ледового пояса, где в соответствующих плоскостях были наложены условия симметрии (см. рис. 3.60). При этом нагрузка принималась равной максимальной нагрузке, полученной при статических испытаниях традиционной конструкции перекрытия ледового пояса. Свойства и модель материала полностью соответствовали использованным в численном расчёте прочности традиционной конструкции перекрытия ледового пояса.

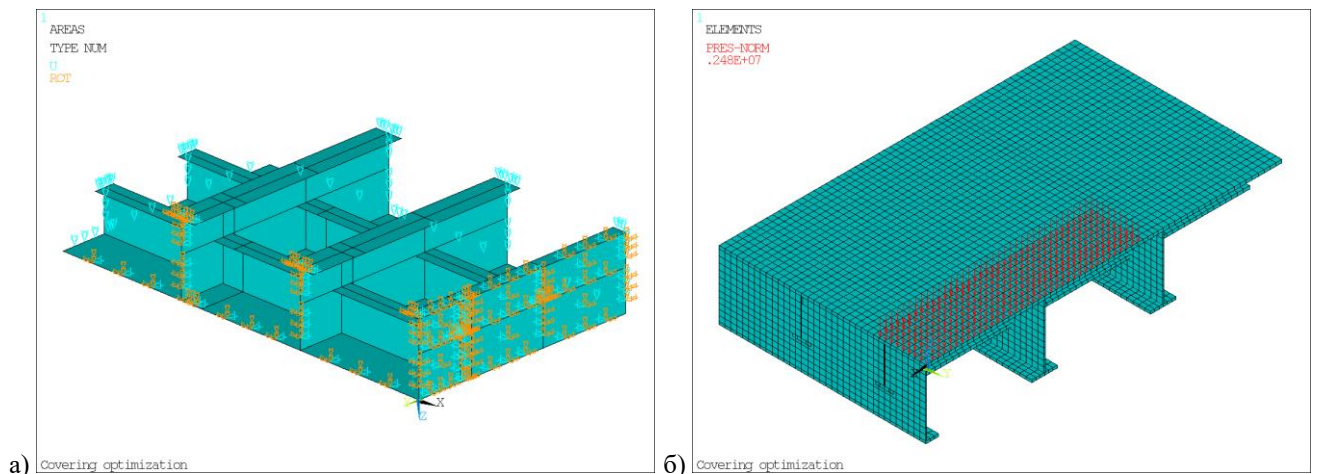


Рис. 3.60 – Геометрическая (а) и КЭ (б) модели четверти перекрытия ледового пояса в задаче ПО



В качестве параметров выступали высоты и толщины стенок, а также ширины и толщины поясков – всего 8 параметров. При этом толщина наружной обшивки оставалась неизменной.

В результате решения задачи ПО получены размеры профилей основного и перекрёстного набора, значения которых приведены в табл. 3.13. Разработанная на их основе оптимизированная конструкция перекрытия ледового пояса МЛСП показана на рис. 3.61.

Табл. 3.13 – Геометрические характеристики оптимизированной конструкции ледового пояса МЛСП

Параметр		Значение
Размеры опорного контура $a \times b$ , мм		2780×4770
Толщина наружной обшивки $s$ , мм		20
Основной (короткий) набор	сечение, мм	T 380×140×10×25
	пролёт, мм	2780
	шпация, мм	790
Перекрёстный (длинный) набор	сечение, мм	T 250×122×8×20
	пролёт, мм	4770
	шпация, мм	548

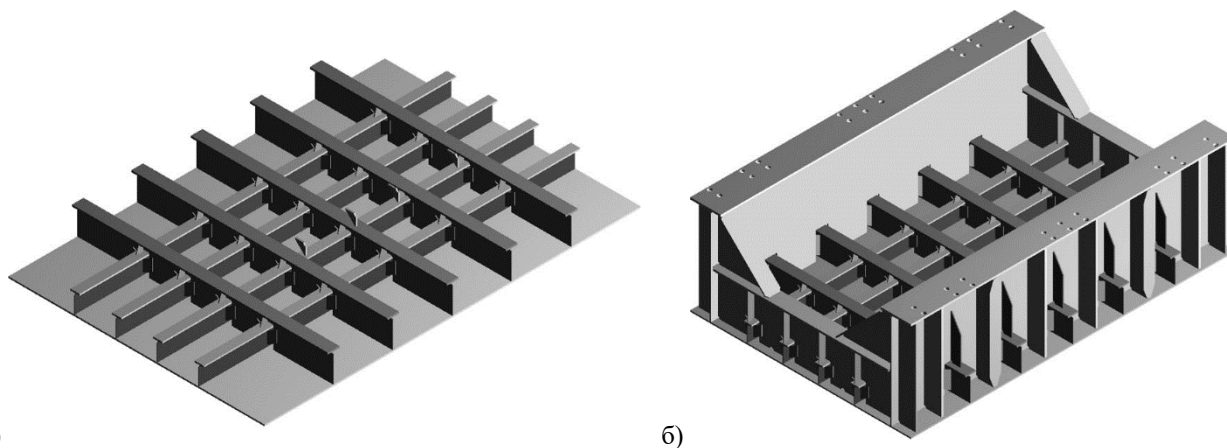


Рис. 3.61 – Оптимизированная конструкция перекрытия ледового пояса МЛСП (вид изнутри): а) наружная обшивка и набор; б) перекрытие с опорным контуром

### 3.3.3 Прочность оптимизированной конструкции перекрытия ледового пояса

#### 3.3.3.1 Статические испытания

Статические прочностные испытания оптимизированной конструкции ледового пояса МЛСП проводились в полной аналогии со статическими испытаниями традиционной конструкции ледового пояса. Общий вид закреплённой конструкции и индентора показан на рис. 3.62. Нагружение также происходило ступенчато в два этапа (см. рис. 3.63). Однако в этот раз на первом этапе нагрузка с шагом 300 кН нарастала от 300 уже до 9 000 кН, после чего был выполнен полный сброс нагрузки. А на втором этапе нагрузка с шагом 500 кН нарастала от 10 000 до 13 860 кН, когда была зафиксирована потеря несущей способности конструкции. Таким образом, статические прочностные испытания выявили почти двукратное увеличение несущей способности оптимизированного ледового пояса по сравнению с традиционным.

В данном случае процесс разрушения конструкции и потери её несущей способности развивался по другому сценарию. Первый хлопок послышался при нагрузке 7 800 кН, после чего

был сделан временный сброс до уровня 7 000 кН. Этот хлопок был связан с началом отрыва книц опорного контура от поясков балок основного (короткого) набора (см. рис. 3.64). При последующем нагружении подобный отрыв наблюдался почти на всех балках (см. рис. 3.65). После этого основной набор фактически повис на наружной обшивке и перекрёстном наборе. Ещё одним фактором потери несущей способности стала потеря устойчивости стенок центральных балок основного (см. рис. 3.68) и перекрёстного наборов, а также депланация центральных балок основного набора (см. рис. 3.66 и рис. 3.67).



Рис. 3.62 – Общий вид оптимизированной конструкции ледового пояса МЛСП перед нагружением



Рис. 3.63 – Диаграмма нагружения оптимизированной конструкции ледового пояса МЛСП



Рис. 3.64 – Начало отрыва пояска балки основного набора от кницы на опорном контуре при нагрузке 7 800 кН

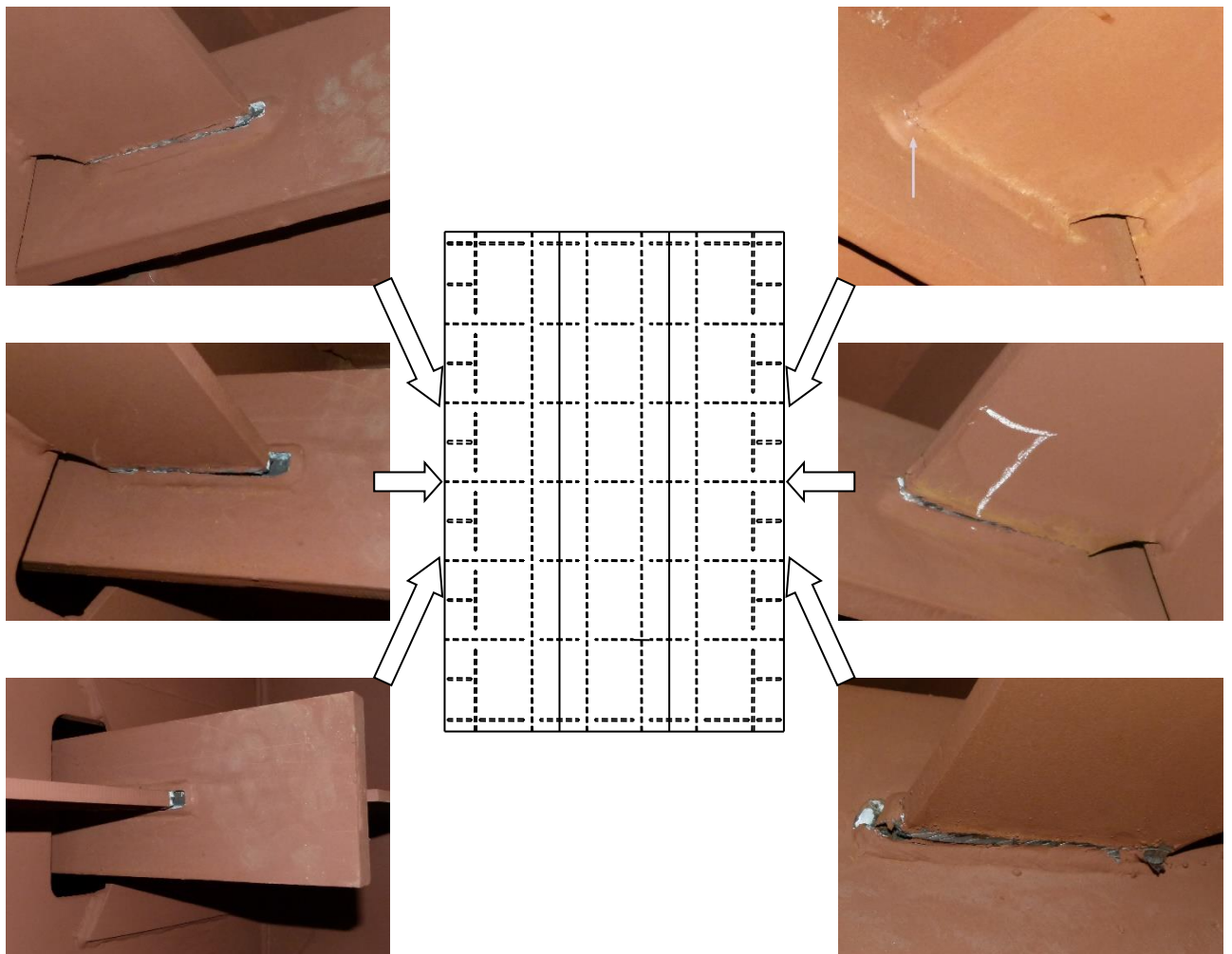


Рис. 3.65 – Отрыв поясков балок основного набора от книц на опорном контуре. Вид после испытаний

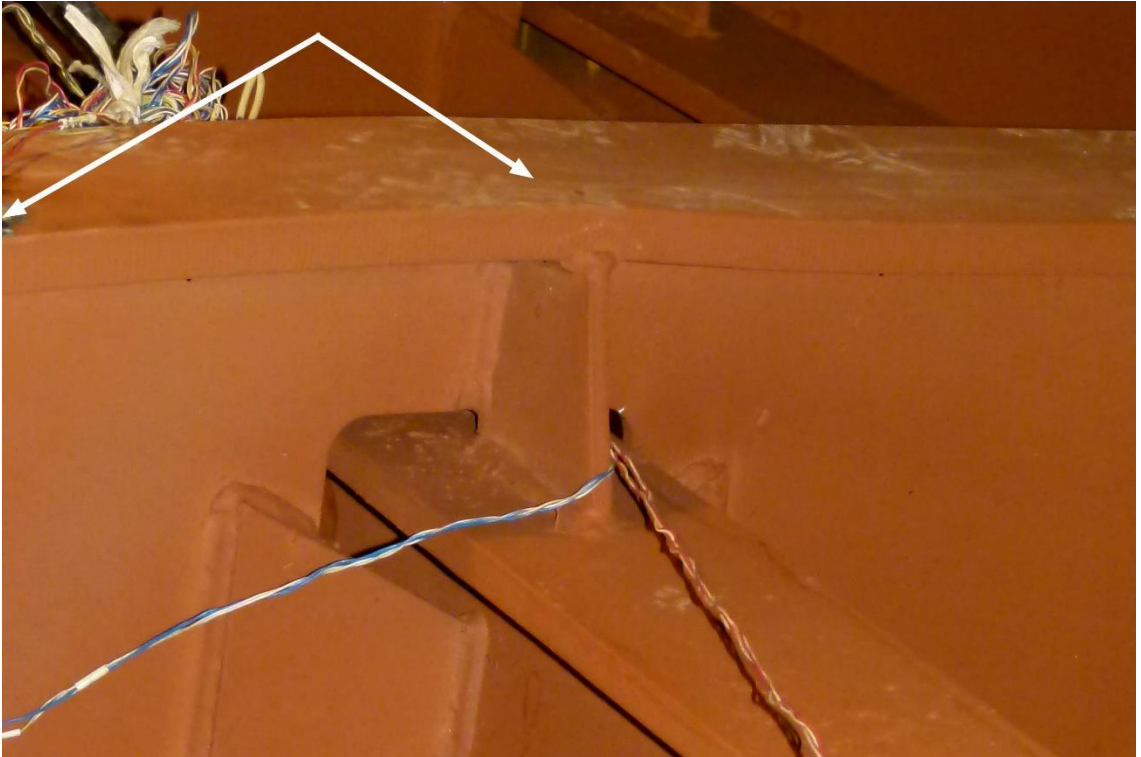


Рис. 3.66 – Остаточное скручивание пояска балки основного набора после сброса нагрузки с 7 800 до 7 000 кН

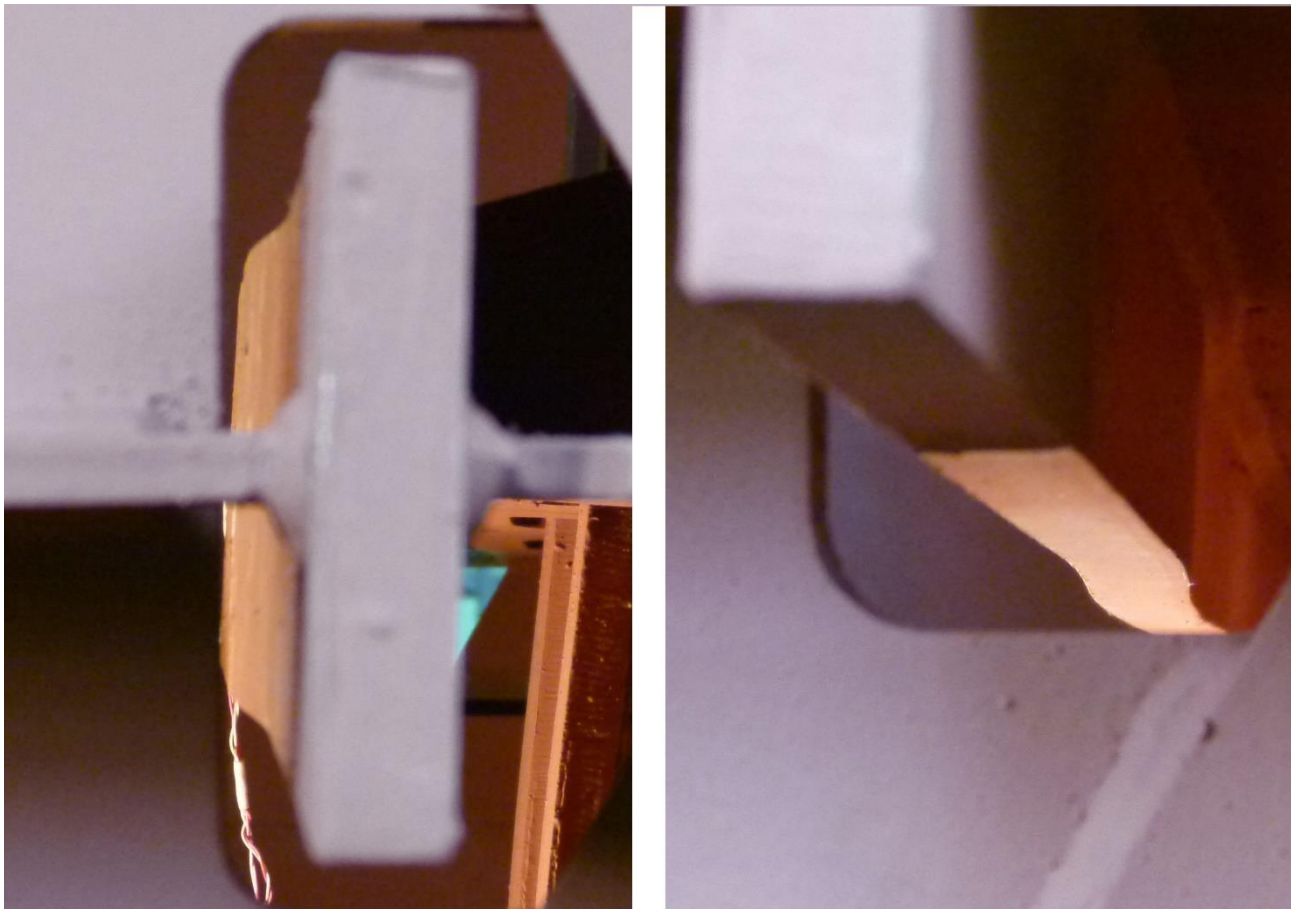


Рис. 3.67 – Деформации пояска, видимые через отверстие в опорном контуре

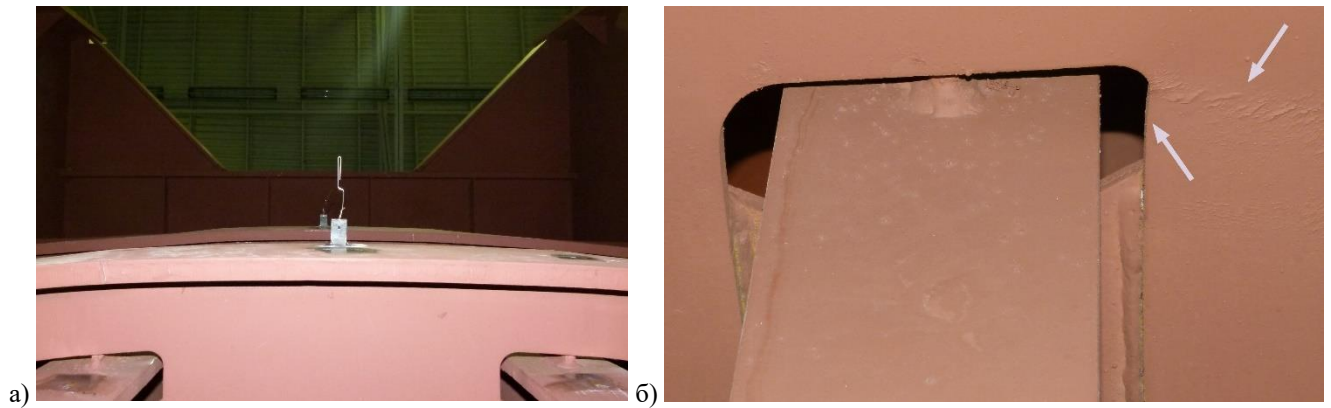


Рис. 3.68 – Остаточные деформации центральной балки основного набора: а) остаточный прогиб; б) отслоение краски и искажение контура, свидетельствующие о местной потере устойчивости

### 3.3.3.2 Оценка прочности численными методами

С целью проверки отсутствия технологического брака и корректности полученных результатов статических испытаний выполнялось численное моделирование всего процесса испытаний. Была создана КЭ модель четверти перекрытия ледового пояса и нагружающего индентора, заполненного деревянными брусками, моделируемыми трансверсально изотропным материалом (см. рис. 3.53). В соответствующих плоскостях были наложены условия симметрии.

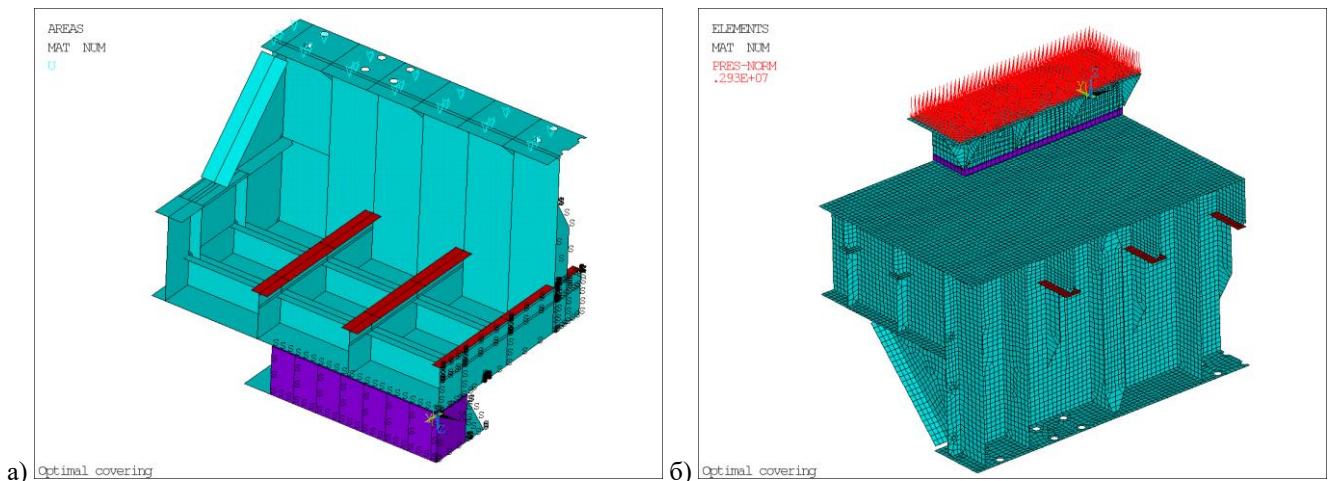


Рис. 3.69 – Геометрическая (а) и КЭ (б) модели традиционной конструкции ледового пояса МЛСП

Конструкция перекрытия и стальной обоймы моделировались оболочечными конечными элементами второго порядка типа **SHELL281**. Все металлические конструкции были выполнены из стали марки СтЗсп-5, свойства которой описывались линейной изотропной моделью в упругой области и моделью линейного кинематического упрочнения в пластической области (см. табл. 3.11).

Деревянные бруска, заполняющие индентор, моделировались объёмными конечными элементами второго порядка типа **SOLID186**. Бруска были изготовлены из сосны, свойства которой описывались упругой линейной ортотропной моделью в цилиндрической системе координат (см. табл. 3.12).

Для моделирования нагружения перекрытия индентором были созданы контактные пары, описывающие взаимодействие деревянных брусьев как между собой, так и с наружной обшивкой перекрытия и со стальной обоймой индентора.

Для всех контактных пар использовался изотропный закон трения Кулона – Амонтона с коэффициентом трения покоя  $\mu_s = 0,6$  и коэффициентом трения скольжения  $\mu_d = 0,3$ . При этом максимальное касательное напряжение трения было задано на уровне  $\tau_{max} = 7$  МПа, что соответствует пределу прочности сосны на скалывание вдоль волокон.

Нагружение происходило путём приложения к внешней поверхности индентора равномерного давления, ступенчато изменяющегося согласно диаграмме нагружения конструкции, показанной на рис. 3.63.

В ходе решения задачи был подтверждён отрыв книц опорного контура от поясков балок основного набора (см. рис. 3.70). Также была выявлена потеря устойчивости стенок балок основного и перекрёстного наборов (см. рис. 3.71).

Как и в случае традиционной конструкции перекрытия ледового пояса, была выявлена существенная неравномерность распределения контактных давлений (см. рис. 3.72), связанная с изгибом наружной обшивки и балок набора в процессе нагружения.

В качестве интегральной оценки сходимости результатов расчёта и эксперимента был выбран прогиб в центре перекрытия. Как можно видеть из сопоставления диаграмм прогибов, показанных на рис. 3.59, основное расхождение между расчётом и экспериментом наблюдается после нагрузки 7 000 кН, когда в эксперименте начинает происходить отрыв книц опорного сечения от поясков балок основного набора. Погрешность оценивалась с помощью  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_\infty$  норм:

$$\delta_1 u = \frac{\|u_{\text{эксп}}\|_1 - \|u_{\text{расч}}\|_1}{\|u_{\text{эксп}}\|_1} = 29,5\%, \quad (3.14)$$

$$\delta_2 u = \frac{\|u_{\text{эксп}}\|_2 - \|u_{\text{расч}}\|_2}{\|u_{\text{эксп}}\|_2} = 34,6\%, \quad (3.15)$$

$$\delta_\infty u = \frac{\|u_{\text{эксп}}\|_\infty - \|u_{\text{расч}}\|_\infty}{\|u_{\text{эксп}}\|_\infty} = 3,2\%. \quad (3.16)$$

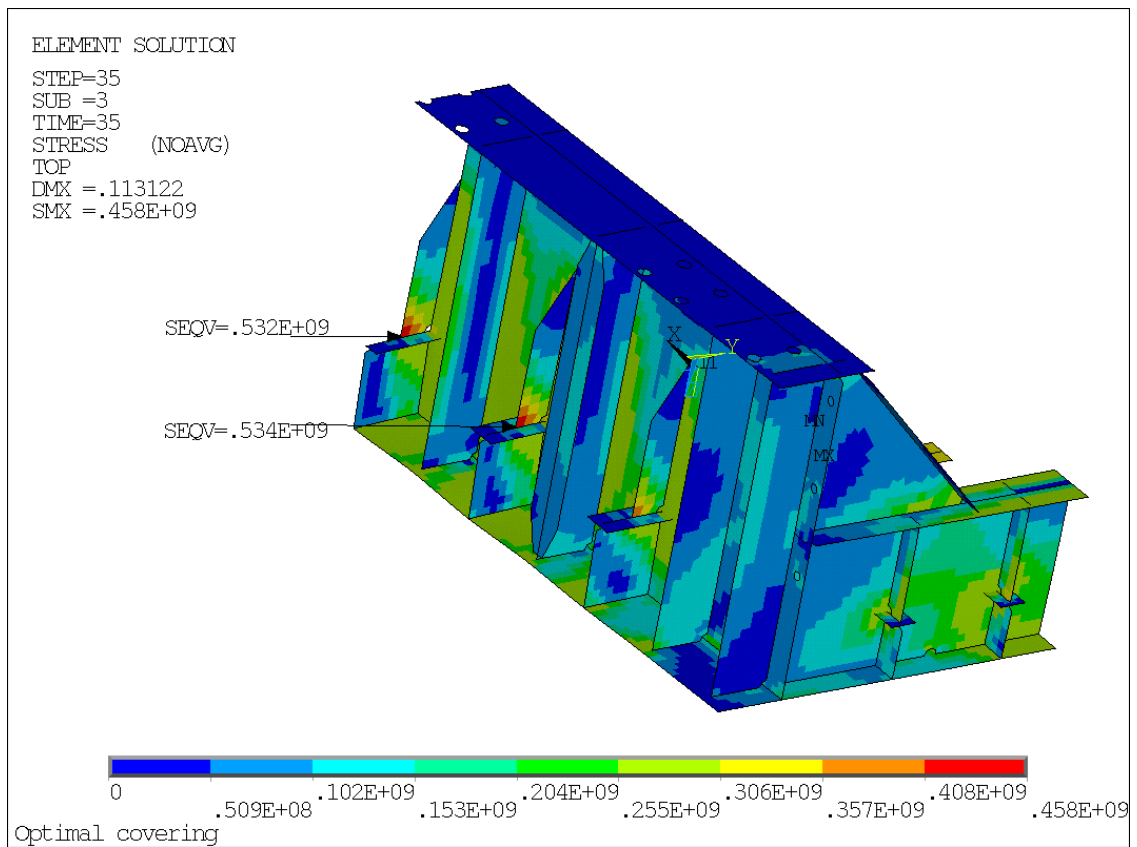


Рис. 3.70 – Отрыв книц опорного контура от поясков балок основного набора при нагрузке 11 000 кН

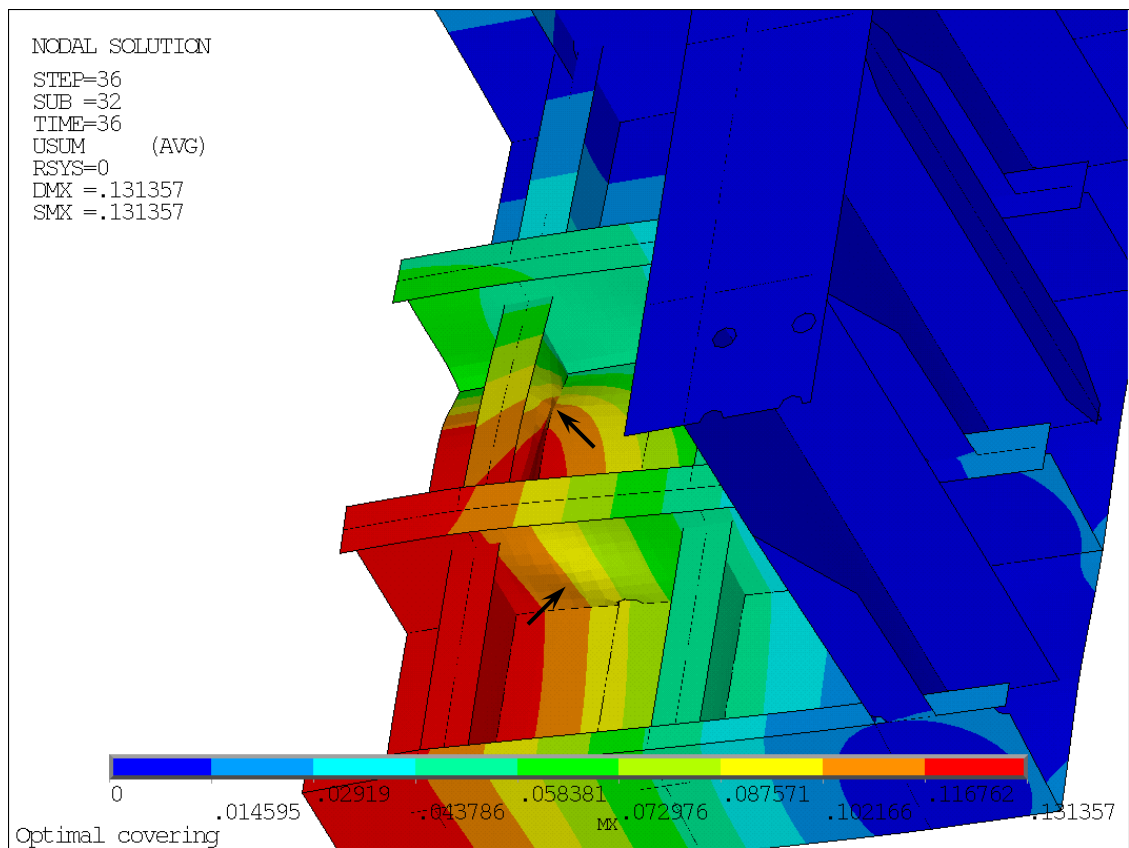


Рис. 3.71 – Потеря устойчивости стенок балок основного и перекрёстного наборов при нагрузке 11 500 кН

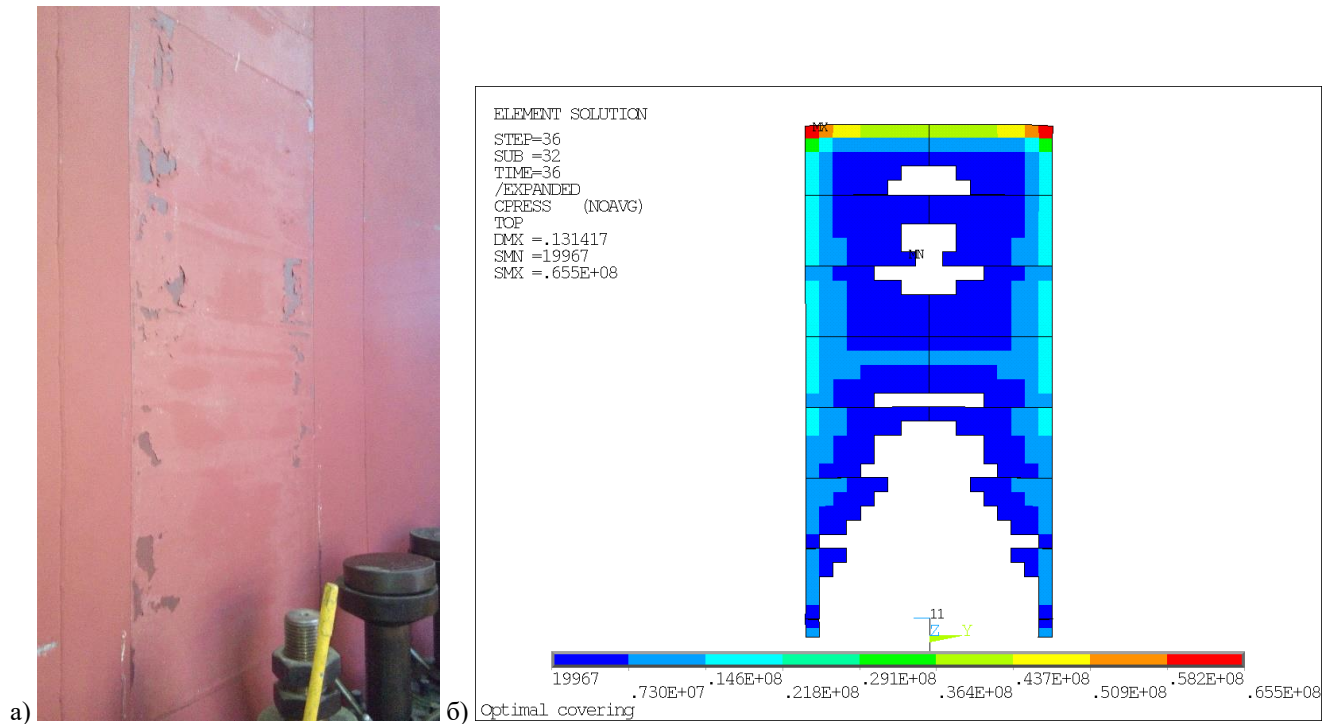


Рис. 3.72 – а) Отпечаток деревянных брусев на наружной обшивке после испытаний; б) Распределение контактных давлений при нагрузке 11 500 кН

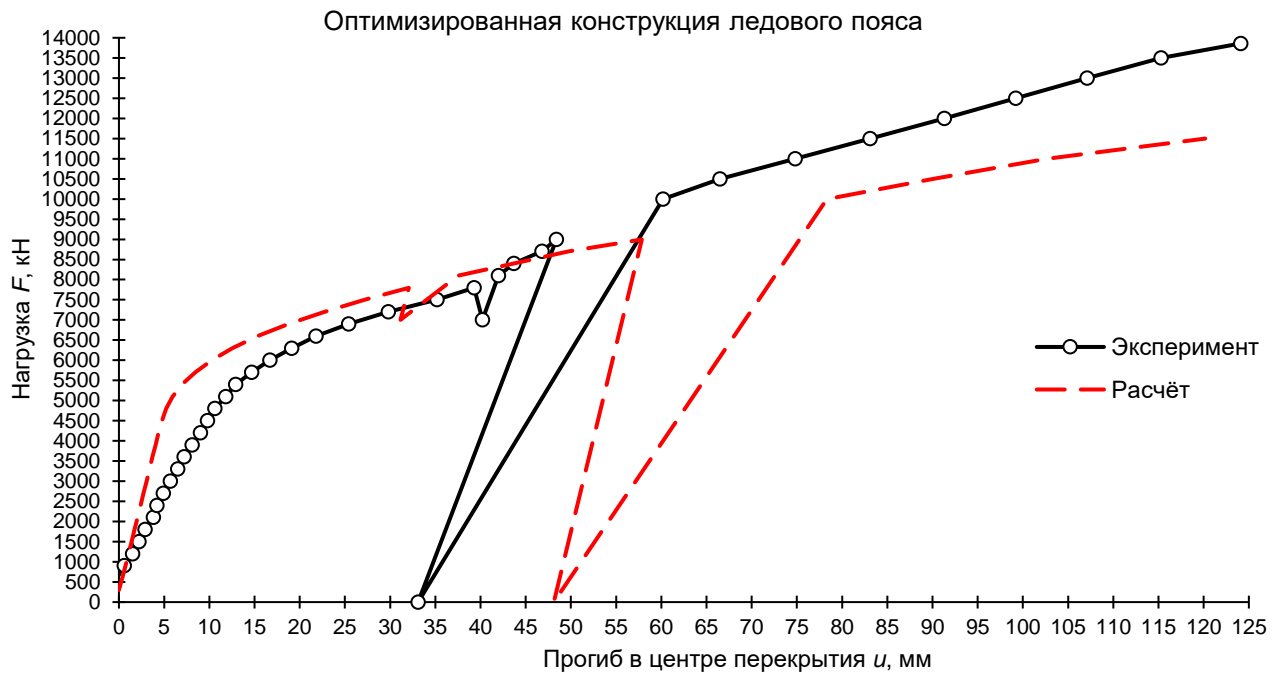


Рис. 3.73 – Диаграмма деформирования оптимизированной конструкции ледового пояса МЛСП

### 3.3.4 Оценка эффективности оптимизированной конструкции и рекомендации по конструктивному оформлению перекрытий ледовых поясов

На рис. 3.74 показаны графики измеренных в процессе испытаний прогибов традиционной и оптимизированной конструкций перекрытия ледового пояса МЛСП. Как видно, при одинаковых массах у оптимизированной конструкции жёсткость оказалась выше на 60 %, а несущая способность – почти вдвое больше.



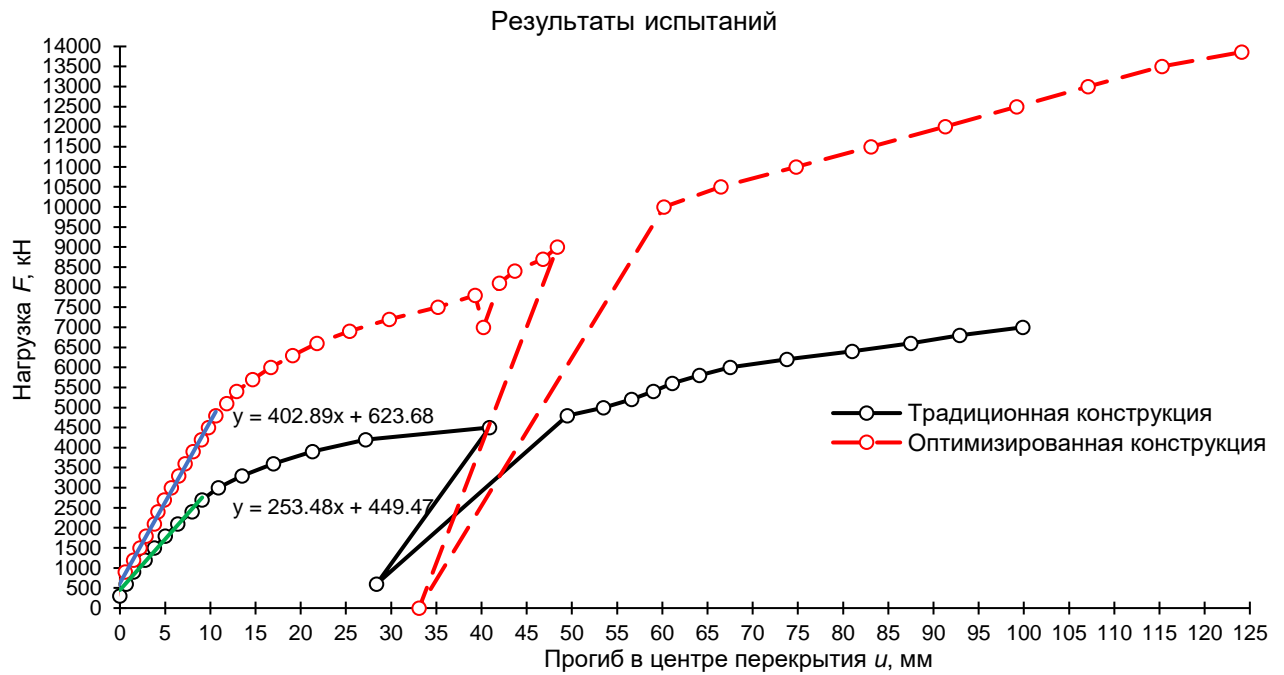


Рис. 3.74 – Диаграммы деформирования традиционной и оптимизированной конструкций ледового пояса МЛСП

Расчётным и экспериментальным путём установлено, что использование в металлическом ледовом поясе МЛСП перекрытий с равновысокими балками целесообразно при опорном контуре перекрытия, близком к квадратному. При заметном различии сторон опорного контура рекомендуется использование балок разной высоты, причём более высокие балки должны располагаться вдоль короткой стороны.

Экспериментальным путём установлено, что использование односторонней разделки кромок в толстолистовых стальных конструкциях сопряжено с высокой вероятностью наличия технологического брака (непровара), который приводит к преждевременному разрушению сварных швов в упруго-пластической области. Поэтому для толстолистовых конструкций толщиной более 10 мм рекомендуется использовать стыковые сварные соединения только с двусторонней разделкой кромок.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках исследований и разработок, выполненных в настоящей диссертации:

1. Разработан метод проектирования судовых конструкций с использованием комплексного подхода к оптимизации топологии, размеров и формы. Этот метод обеспечивает системное решение трёх задач проектирования: определение конструктивно-силового оформления изделия за счёт выполнения ТО; определения прочных размеров конструкций путём выполнения ПО; обеспечения усталостной прочности с помощью выполнения ОФ. Отличительной чертой, составляющей научную новизну разработанного метода, является совместное выполнение трёх видов оптимизации.
2. Для каждого вида оптимизации сформулированы целевые функции и ограничения.
3. Проанализированы методы ПО, ТО и ОФ. Предложена модификация метода последовательного квадратичного программирования, в которой вместо линеаризации ограничений выполняется их квадратичное приближение.
4. Даны рекомендации по решению сформулированных оптимизационных задач, включая методы решения и способы учёта ограничений. Разработан алгоритм проведения многоцелевой оптимизации при наличии нескольких расчётных случаев нагружения. Продемонстрировано влияние сочетания линейно независимых нагрузок на получающиеся оптимальные конструкции.
5. Даны формулировки основных этапов алгоритма рационального проектирования судовых конструкций, входящего в состав разработанного метода проектирования и включающего процедуры оптимизации и валидации проектных решений.
6. Разработаны эффективные способы валидации полученного оптимального проектного решения, включающие в себя проверку предельной прочности, нелинейной устойчивости и усталостной прочности более точными методами по сравнению с имеющимися в нормативных документах, что позволяет отказаться от экспериментальной проверки.
7. Проанализированы существующие критерии предельной и усталостной прочности, а также устойчивости. Предложены формулы для определения истинных напряжений и деформаций на участке после образования шейки, а также выражения для касательного модуля в линейных моделях пластического упрочнения. Разработан алгоритм проверки предельной прочности на основе критериев хрупкого и вязкого разрушения. Разработан алгоритм проверки нелинейной устойчивости. Предложена модификация модели усталостной прочности Басквина – Мэнсона – Коффина с коррекцией средних напряжений Смита – Уотсона – Топпера, основанная на усреднении напряжённо-деформированного состояния в пределах структурного элемента. Проанализированы методы сведения

сложного напряжённого состояния к простому в расчётах усталости и даны рекомендации по их использованию. Получены аналитические выражения расчётных напряжений при анализе усталостной прочности в случае плоского напряжённого состояния и в случае пропорционального нагружения, предложена знаковая модификация метода Синса. Разработан новый метод расчёта усталостной прочности, учитывающий трёхосность напряжённо-деформированного состояния в узлах и особенности проверки как многоциклового, так и малоциклового усталости. Даны рекомендации по учёту при решении оптимизационных задач критериев предельной и усталостной прочности, а также устойчивости.

8. Выполнена апробация предложенного метода оптимального проектирования судовых конструкций и на его основе разработаны:

8.1. Узел стыкового соединения алюминиевых панелей в составе корпуса высокоскоростного судна, отличающийся от рекомендованного Правилами РМРС в 2 раза меньшей массой и в 3 раза большим ресурсом.

8.2. Запатентованная конструкция крышки люкового закрытия сухогрузного судна, отличающиеся от используемой на сухогрузе проекта RSD59 на 30 % меньшей массой и в 5 раз большим ресурсом.

8.3. Конструкция перекрытия ледового пояса морской ледостойкой стационарной платформы, отличающаяся от прототипа на 60 % большей жёсткостью и почти в 2 раза большей несущей способностью при одинаковой массе. Достоверность полученных результатов подтверждена сопоставлением расчётных и экспериментальных данных.

Учёт трёхосности НДС и пластического течения материала в разработанных методах и алгоритмах расчёта предельной прочности и устойчивости позволяет с высокой степенью точности определять несущую способность конструкций, а в разработанном методе расчёта усталости позволяет с высокой степенью точности прогнозировать ресурс конструкций. Конструкции, получаемые в результате использования разработанного метода оптимального проектирования, при малом весе имеют как высокую жёсткость и прочность, так и высокий ресурс, что благоприятным образом отражается на экономической эффективности содержащего их объекта морской техники.

## СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

ВП	– выпуклое программирование
ВСС	– высокоскоростное судно
КИН	– коэффициент интенсивности напряжений
КП	– квадратичное программирование
КЭ	– конечный элемент или конечноэлементный
ЛЗ	– люковое закрытие
ЛП	– линейное программирование
МАКО	– Международная ассоциация классификационных обществ
МКО	– метод критериев оптимальности
МКЭ	– метод конечных элементов
МЛСП	– морская ледостойкая стационарная платформа
МаЦУ	– малоцикловая усталость
МнЦУ	– многоцикловая усталость
НДС	– напряжённо-деформированное состояние
ОФ	– оптимизация формы
ПВП	– последовательное выпуклое программирование
ПК	– программный комплекс
ПКП	– последовательное квадратичное программирование
ПО	– параметрическая оптимизация
ППД	– предельная пластическая деформация
ПЭ	– подкрепляющий элемент
РМРС	– Российский морской регистр судоходства
САПР	– система автоматизированного проектирования
СПК	– судно на подводных крыльях
ТО	– топологическая оптимизация
ЦЛП	– целочисленное линейное программирование
$\mathbb{R}$	– множество вещественных чисел
$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{Bmatrix}$	– вектор-столбец, элементами которого являются его координаты $x_1, x_2, \dots$
$\{x\}^T = \{x_1 \quad x_2 \quad \dots\}$	– транспонированный вектор $\{x\}$ (вектор-строка)
$\text{card}\{x\}$	– число элементов вектора $\{x\}$ (мощность $\{x\}$ как множества)
$ \{x\}  = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots}$	– модуль вектора $\{x\}$ (его евклидова норма)

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots \\ A_{21} & A_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad - \text{ матрица, элементами которой являются } A_{11}, A_{12}, \dots, A_{21}, A_{22}, \dots$$

$$[A]^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots \\ A_{12} & A_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad - \text{ транспонированная матрица } [A]$$

$$\text{diag}\{x\} = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & \dots \\ 0 & x_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad - \text{ диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят элементы вектора } \{x\}$$

$$[A]^{-1} \quad - \text{ обратная к } [A] \text{ матрица: } [A][A]^{-1} = [A]^{-1}[A] = [1], \text{ где } [1] = \text{diag}\{1\}$$

$$\nabla f(\{x\}) = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \dots \right\} \quad - \text{ ковектор-градиент функции } f \text{ (вектор-строка)}$$

$$[\nabla\{f\}(\{x\})] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad - \text{ матрица Якоби вектор-функции } f = \{f_1 \ f_2 \ \dots\}^T:$$

$$[\nabla\{f\}(\{x\})] = \begin{bmatrix} \nabla f_1(\{x\}) \\ \nabla f_2(\{x\}) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$[\nabla^2 f(\{x\})] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad - \text{ матрица Гессе вторых производных функции } f:$$

$$[\nabla^2 f(\{x\})] = [\nabla\{\nabla f(\{x\})\}]^T$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кудрин М.А., Маслич Е.А., Платонов В. В., Филатов А.Р. Автоматизация расчётной проверки предельной и усталостной прочности корпусов навалочных и наливных судов на основе единых правил МАКО // Труды Крыловского государственного научного центра. 2014. № 82(366). С. 17-20.
2. Крыжевич Г.Б., Филатов А.Р. Численное моделирование процессов упругопластического деформирования перекрытия ледового пояса морской ледостойкой платформы // Труды Крыловского государственного научного центра. 2015. № 86(370). С. 125-132.
3. Бухвалова В.В., Филатов А.Р. Геометрическое программирование и задачи проектирования // Образовательные технологии и общество. 2017. Т. 20, № 1. С. 508-518.
4. Kryzhevich G.B., Filatov A.R. Analysis of stress-strain state specifics for compound wing with non-continuous members and elaboration of recommendations for its rational design // NSN'2017 Proceedings. St. Petersburg, 2017. P. 132-141.
5. Крыжевич Г.Б., Филатов А.Р. Модель упругопластического деформирования алюминиевых сплавов и критерии малоциклового усталости конструкций // Труды Крыловского государственного научного центра. 2018. Спец. выпуск 2. С. 85-95.
6. Александров А.В., Крыжевич Г.Б., Филатов А.Р., Рыбалко Т.Р. Расчетный анализ усталостной долговечности и скорости выработки ресурса на различных стадиях жизненного цикла СПБУ // Труды Крыловского государственного научного центра. 2019. Спец. выпуск 1. С. 137-145.
7. Крыжевич Г.Б., Филатов А.Р. Учет многоосности нагружения узлов соединения конструкций морской техники при расчетах их усталостной прочности // Труды Крыловского государственного научного центра. 2019. Спец. выпуск 1. С. 153-161.
8. Филатов А.Р. Различные способы учета трехосности напряженного состояния при расчетах усталостной прочности // Труды Крыловского государственного научного центра. 2019. Спец. выпуск 2. С. 132-142.
9. Крыжевич Г.Б., Филатов А.Р. Комплексный подход к топологической и параметрической оптимизации судовых конструкций // Труды Крыловского государственного научного центра. 2020. № 1(391). С. 95-108.
10. Крыжевич Г.Б., Филатов А.Р. Конструктивное оформление узлов судовых конструкций с использованием программ топологической и параметрической оптимизации // Труды Крыловского государственного научного центра. 2020. Спец. выпуск 1. С. 67-72.
11. Крыжевич Г.Б., Филатов А.Р. Оптимизация алюминиевой крышки люкового закрытия сухогрузного судна // Морские интеллектуальные технологии. 2020. № 1-3(47). С. 58-65.
12. Бубнов И.Г. Строительная механика корабля. Часть 1. СПб.: Морское министерство,

1912. 330 с.
13. Бубнов И.Г. Строительная механика корабля. Часть 2. СПб.: Морское министерство, 1914. 644 с.
  14. Папкович П.Ф. Строительная механика корабля. Часть 1, т. 1. М.: Морской транспорт, 1945. 618 с.
  15. Шиманский Ю.А. Справочник по строительной механике корабля. Т. 1. Л.: Судпромгиз, 1958. 627 с.
  16. Родионов А.А. Математические методы проектирования оптимальных конструкций судового корпуса. Л.: Судостроение, 1990. 248 с.
  17. Кормилицин Ю.Н., Малышевский Ю.В., Родионов А.А. Совершенствование методов проектирования корпусных конструкций подводных лодок нового поколения // Судостроение. 2006. № 1(764). С. 32-35.
  18. Животовский Г.А., Родионов А.А. Многокритериальное проектирование крыльевого комплекса СПК со смешанными переменными проектирования // Судостроение. 2006. № 4(767). С. 17-21.
  19. Родионов А.А. Инновационные направления строительной механики: оптимизация конструкций, обеспечивающая повышение эффективности и конкурентоспособности судов // Морской вестник. 2009. № 2(30). С. 110-112.
  20. Тряскин В.Н., Кхайн М. Применение аппарата математического программирования для решения задач параметрического проектирования конструкций корпуса судна // Труды ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова. 2009. № 46(330). С. 29-40.
  21. Сочинский С.В. Алгоритм метода наискорейшего спуска для определения посадки судна // Труды ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова. 2012. № 67(351). С. 127-130.
  22. Анкудинов О.С., Сочинский С.В. Применение метода наискорейшего спуска для расчета непотопляемости судна // Труды Крыловского государственного научного центра. 2015. № 89-2 (373-2). С. 19-24.
  23. Алексахин Д.А., Бойко М.С., Кутейников М.А. Применение метода "роя частиц" для автоматизированного параметрического проектирования поперечной танкерной рамы согласно требованиям общих правил МАКО // Научно-технический сборник Российского морского регистра судоходства. 2017. № 48-49. С. 51-58.
  24. Тряскин В.Н. Методология параметрического проектирования конструкций корпуса судна // Труды Крыловского государственного научного центра. 2018. Спец. выпуск 2. С. 9-14.
  25. Ольховик Е.О., Десницкий В.В. Применение методов топологической оптимизации при разработке литейной технологии // Вестник МГТУ им. Г.И. Носова. 2016. Т. 14, № 4. С. 27-35.

26. Чубуков Н.С., Миронов М.Ю. Топологическая оптимизация регулярных пластинчатых и ферменных структур на основе алгоритмов выравнивания полей напряжений // Прикладная математика и информатика: современные исследования в области естественных и технических наук. Тольятти, 2017. С. 632-637.
27. Воропаев А.О., Горбунов А.В. Аналитическое исследование возможности применения современных средств топологической оптимизации для изделий судового машиностроения // Морские интеллектуальные технологии. 2018. № 4(42), т. 1. С. 218-222.
28. Онегина Н.А., Морозов А.С. Инновационное проектирование средств технологического оснащения судостроительного производства // Научно-технические ведомости Севмашвтуза. 2019. № 1. С. 27-30.
29. Коршунов В.А., Пономарев Д.А., Родионов А.А. Топологическая оптимизация винта подруливающего устройства // Морские интеллектуальные технологии. 2019. № 4(46), т. 1., С. 45-51.
30. Jia Z., Ringsberg J.W., Jia J. Numerical analysis of nonlinear dynamic structural behaviour of ice-loaded side-shell structures // International Journal of Steel Structures. 2009. Vol. 9, no. 3. P. 219-230.
31. Lindemann T., Kaeding P. An Approach to Optimization in Ship Structural Design Using Finite Element and Optimization Techniques // 20th International Offshore and Polar Engineering Conference. Beijing, 2010. P. 803-808.
32. Daifuku M., Nishizu T., Takezawa A., Kitamura M., Terashita H., Ohtsuki Y. Design methodology using topology optimization for anti-vibration reinforcement of generators in a ship's engine room // Journal Engineering for the Maritime Environment. 2014. Vol. 230, no. 1. P. 216-226.
33. Jang I.G., Kim K.-S., Kwak B.M. Conceptual and basic designs of the Mobile Harbor crane based on topology and shape optimization // Structural and Multidisciplinary Optimization. 2014. Vol. 50, no 3. P. 505-515.
34. Li K., Yi Z., Ling C., Yuan Z., Jiang X. Weight minimization of ship chamber structure in vertical ship lift design based on multi-level structural optimization method // Journal of Marine Science and Technology. 2018. Vol. 26, no. 4. P. 562-574.
35. Яров В.А., Прасоленко Е.В. Проектирование круглых монолитных плит перекрытий рациональной структуры с использованием топологической и параметрической оптимизации // Вестник ТГАСУ. 2011. № 3(32). С. 89-102.
36. Васильев Б.Е., Магеррамова Л.А. Анализ возможности применения топологической оптимизации при проектировании неохлаждаемых рабочих лопаток турбин // Вестник СГАУ имени акад. С.П. Королёва. 2015. Т. 14, № 3, ч. 1. С. 139-147.



37. Марченко П.А., Новокшенов А.Д. Топологическая оптимизация модели кронштейна под установку звездного датчика // Неделя науки СПбПУ. Санкт-Петербург, 2015. С. 97-100.
38. Боровиков А.А., Тененбаум С.М. Топологическая оптимизация переходного отсека КА // Аэрокосмический научный журнал. 2016. Т. 2, № 5. С. 16-30.
39. Васильев Б.Е., Сальников А.В., Магеррамова Л.А., Морозов И.И., Кишов Е.А. Анализ опыта проектирования пустотелого диска турбины высокого давления с использованием методов параметрической и топологической оптимизации для аддитивного производства // Проблемы и перспективы развития двигателестроения. Самара, 2016. С. 116-118.
40. Комаров В.А., Кишов Е.А. Проектирование кронштейна навески интерцептора с использованием топологической оптимизации // Авиация и космонавтика. Москва, 2016. С. 37-38.
41. Поддубко С.Н., Шмелев А.В., Ивченко В.И., Заболоцкий М.М., Трухнов Л.И., Хацкевич А.С. Компьютерное проектирование несущих конструкций машин с применением средств топологической оптимизации // Актуальные вопросы машиноведения. 2016. № 5. С. 86-90.
42. Александрин Ю.С., Туктаров С.А., Чедрик В.В. Проектирование силовой конструкции крыла вертолета на основе топологической и глобально-локальной оптимизации // Ученые записки ЦАГИ. 2017. Т. 48, № 1. С. 72-85.
43. Бояршинова И.Н., Ильиных М.С. Комбинированная методика оптимального проектирования конструкций с целью снижения веса // Цифровые средства производства инженерного анализа. Тула, 2017. С. 24-31.
44. Васильев Б.Е., Калинин Д.В., Свинаярева М.С., Гудков Н.А. Анализ возможности применения топологической оптимизации при проектировании зубчатых передач // Машины и установки: проектирование, разработка и эксплуатация. 2017. № 3. С. 35-45.
45. Еремин А.В., Жуков В.В., Кишов Е.А. Проектирование силовой тяги с использованием топологической оптимизации // Молодежный научный вестник. 2017. № 11(24). С. 132-138.
46. Zakharov V.O. Topological optimization on the example of the small spacecraft «Aist-2D» // Modern Science. 2017. No 3. P. 27-32.
47. Фасахов Р.Р., Харалдин Н.А., Алешин М.В., Клявин О.И., Боровков А.И. Проектирование конструкции автомобиля на основе поиска оптимальных путей нагружения с помощью топологической оптимизации // Неделя науки СПбПУ. Санкт-Петербург, 2017. С. 32-34.
48. Французов А.А., Шаповалов Я.И., Вдовин Д.С. Применение метода топологической оптимизации в задачах проектирования грузоподъемной техники // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2017. № 2(42). С. 99-108.

49. Чирский С.П., Мягков Л.Л. Метод оптимизации формы основных деталей ДВС // Двигатель-2017. Москва, 2017. С. 33-34.
50. Алехин П.А., Хлебников В.А., Хрусталеv Р.В. Применение методов топологической оптимизации для создания новых конструкций радиаторов пассивного охлаждения // Виртуальное моделирование, прототипирование и промышленный дизайн. 2018. Т. 1, № 5. С. 124-131.
51. Куркин Е.И., Спирина М.О., Шапошников С.Н., Макурин Н.М. Применение многоуровневого подхода при проектировании пространственных конструкций из короткоармированных композитов // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2018. Т. 20, № 6-2(86). С. 270-277.
52. Попова Д.Д., Самойленко Н.А., Семенов С.В., Балакирев А.А., Головкин А.Ю. Применение метода топологической оптимизации для уменьшения массы конструктивно подобного кронштейна трубопровода авиационного ГТД // Вестник ПНИПУ. Аэрокосмическая техника. 2018. № 55. С. 42-51.
53. Тагиев Р.С., Москаленко М.Б. Топологическая оптимизация рамы автомобиля // Перспективные направления развития автотранспортного комплекса. Пенза, 2018. С. 90-93.
54. Хитрин А.М., Ерофеева М.М., Туктамышев В.Р., Ширяев А.А. Топологическая оптимизация корпусных деталей вертолетного редуктора // Вестник ПНИПУ. Аэрокосмическая техника. 2018. № 53. С. 43-51.
55. Боровиков А.А., Леонов А.Г., Тушев О.Н. Методика определения расположения межпанельных кронштейнов корпуса космического аппарата с использованием топологической оптимизации // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия Машиностроение. 2019. № 4. С. 4-19.
56. Буй В.Ф., Прокопов В.С., Гаврюшин С.С., Папазафеиропоулос Д. Топологическая оптимизация конструкции диска турбины при действии термомеханических нагрузок // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2019. № 4(709). С. 60-70.
57. Гончаров Р.Б., Зузов В.Н. Особенности поиска оптимальных параметров усилителей задней части кабины грузового автомобиля на базе параметрической и топологической оптимизации // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 2019. № 2(125). С. 163-170.
58. Козлов М.Ю., Аркатов В.Ю., Гроль М.С. Совершенствование подхода к проектированию внутреннего корпуса камеры сгорания с целью снижения массы с сохранением прочностной надежности на основе топологической оптимизации // Вестник УГАТУ. 2019. Т. 23, № 2(84). С. 98-105.
59. Куркин Е.И., Кишов Е.А., Спирина М.О. Учет анизотропии механических характеристик короткоармированных композиционных материалов при топологической оптимизации

силовых конструкций // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2019. Т. 21, № 5(91). С. 83-89.

60. Рутковский В.О., Рутковская М.А. Оптимизация конструкций гибридных силовых установок // Актуальные проблемы авиации и космонавтики. Красноярск, 2019. С. 341-343.
61. Санников В.А. Снижение структурной составляющей шума путем топологической оптимизации элементов конструкции транспортных средств // Защита от повышенного шума и вибрации. Санкт-Петербург, 2019. С. 613-624.
62. Штромило И.В., Побелянский А.В. Оптимизация кронштейна крепления консоли крыла под технологию аддитивного производства // Молодёжь. Техника. Космос. Санкт-Петербург, 2019. С. 219-224.
63. Бертсекас Д.П. Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. М.: Радио и связь, 1987. 400 с.
64. Лутманов С.В. Курс лекций по методам оптимизации. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001. 368 с.
65. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.
66. Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах: Учебное пособие, 2-е ред. М.: Высшая школа, 2005. 544 с.
67. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации: Учебное пособие, 2-е ред. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 368 с.
68. Габасов Р. и др. Методы оптимизации: Учебное пособие, 3-е ред. Минск: Четыре четверти, 2011. 472 с.
69. Городецкий С.Ю. Лекции по методам нелинейной оптимизации: Учебное пособие. Н.Новгород: ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2018. 219 с.
70. Манита Л.А. Условия оптимальности в конечномерных нелинейных задачах оптимизации. Учебное пособие. М.: Московский государственный институт электроники и математики, 2010. 84 с.
71. Соловьев С.В. Методы оптимизации. Примеры и задачи: Учебное пособие. Хабаровск: Издательство ТОГУ, 2017. 164 с.
72. Аоки М. Введение в методы оптимизации. М.: Наука, 1977. 344 с.
73. Бейко И.В., Бублик Б.Н., Зинько П.Н. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации. Киев: Вища школа, 1983. 512 с.
74. Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы. М.: Наука, 1990. 488 с.
75. Кузнецов А.В., Сакович В.Л., Холод Н.И. Высшая математика. Математическое программирование. Минск: Вышэйшая школа, 1994. 286 с.

76. Азарнова Т.В., Каширина И.Л., Чернышова Г.Д. Методы оптимизации: Учебное пособие. Воронеж: Издательство ВГУ, 2003. 86 с.
77. Карманов В.Г. Математическое программирование: Учебное пособие, 5-е стер. ред. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 264 с.
78. Харчистов Б.Ф. Методы оптимизации: Учебное пособие. Таганрог: Издательство ТРТУ, 2004. 140 с.
79. Умнов Е.А., Умнов А.Е. Параметрические задачи в математическом программировании: Учебное пособие. М.: МФТИ, 2019. 320 с.
80. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982. 256 с.
81. Ногин В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 144 с.
82. Филатов А.Р. Применение методов геометрического программирования при оптимизации балочных конструкций: дипломная работа. СПб.: СПбГУ, 2016.
83. Канторович Л.В. Математические методы организации планирования производства. Л.: Издательство ЛГУ, 1939. 68 с.
84. Dantzig G.B. Programming in a linear structure. Washington: Comptroller, USAF, 1948.
85. Gomory R.E. Outline of an algorithm for integer solutions to linear programs // Bulletin of the American Mathematical Society. 1958. Vol. 64, no. 5. P. 275-279.
86. Алексеев О.Г. Комплексное применение методов дискретной оптимизации. М.: Наука, 1987. 248 с.
87. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Учебное пособие, 3-е стер. ред. СПб.: Лань, 2011. 352 с.
88. Land A.H., Doig A.G. An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems // Econometrica. 1960. Vol. 28, no. 3. P. 497-520.
89. Kuhn H.W., Tucker A.W. Nonlinear programming // Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Berkeley, California, 1951. P. 481-492.
90. Zener C. A mathematical aid in optimizing engineering designs // Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA. 1961. Vol. 47, no. 5. P. 537-539.
91. Даффин Р., Питерсон Э., Зенер К. Геометрическое программирование. М.: Мир, 1972. 311 с.
92. Wolfe P. The Simplex Method for Quadratic Programming // Econometrica. 1959. Vol. 27, no. 3. P. 382-398.
93. Данциг Д. Линейное программирование, его применения и обобщения. М.: Прогресс, 1966. 600 с.
94. Wilson R.B. A Simplicial Method for Convex Programming: PhD thesis. Cambridge: Harvard

University, 1963.

95. Han S.-P. A globally convergent method for nonlinear programming // *Journal of Optimization Theory and Applications*. 1977. Vol. 22, no. 3. P. 297-309.
96. Powell M.J.D. A fast algorithm for nonlinearly constrained optimization calculations // *Numerical analysis*. Dundee, 1978. P. 144-157.
97. Schittkowski K. NLPQL: a FORTRAN subroutine solving constrained nonlinear programming problems // *Annals of Operations Research*. 1986. Vol. 5. P. 485-500.
98. Гантмахер Ф.П. Теория матриц. М.: Наука, 1968. 576 с.
99. Fletcher R. *Practical methods of optimization*, 2nd ed. Chichester: Wiley, 2000. 436 p.
100. Suzuki K., Kikuchi N. A homogenization method for shape and topology optimization // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1991. Vol. 93, no. 3. P. 291-318.
101. Bendsøe M.P., Sigmund O. Material interpolation schemes in topology optimization // *Archive of Applied Mechanics*. 1999. Vol. 69, no. 9-10. P. 635-654.
102. Bendsøe M.P., Sigmund O. *Topology optimization: theory, methods and applications*. Berlin: Springer, 2003. 370 p.
103. Bendsøe M.P., Soares C.A.M. *Topology Design of Structures*. Dordrecht: Springer Science+Business Media, 1993. 569 p.
104. Petersson J., Sigmund O. Slope constrained topology optimization // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1998. Vol. 48, no. 8. P. 1417-1434.
105. Xie Y.M., Steven G.P. Shape and layout optimisation via an evolutionary procedure // *Proceedings of International Conference on Computational Engineering Science*. Hong Kong, 1992.
106. Xie Y.M., Steven G.P. A simple evolutionary procedure for structural optimization // *Computers & Structures*. 1993. Vol. 49, no. 5. P. 885-896.
107. Xie Y.M., Steven G.P. *Evolutionary Structural Optimization*. London: Springer, 1997. 188 p.
108. Huang X., Xie Y.M. *Evolutionary Topology Optimization of Continuum Structures. Methods and Applications*. UK: Wiley, 2010. 223 p.
109. Querin O.M., Steven G.P., Xie Y.M. Evolutionary structural optimization (ESO) using a bidirectional algorithm // *Engineering Computations*. 1998. Vol. 15, no. 8. P. 1031-1048.
110. Yang X.Y., Xie Y.M., Steven G.P., Querin O.M. Bidirectional evolutionary method for stiffness optimization // *AIAA Journal*. 1999. Vol. 37, no. 11. P. 1483-1488.
111. Huang X., Xie Y.M. Convergent and mesh-independent solutions for bi-directional evolutionary structural optimization method // *Finite Elements in Analysis and Design*. 2007. Vol. 43, no. 14. P. 1039-1049.
112. Munk D.J., Vio G.A., Steven G.P. Topology and shape optimization methods using evolutionary algorithms: a review // *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2015.

- Vol. 52, no. 3. P. 613-631.
113. Rozvany G.I.N., Querin O.M. Combining ESO with rigorous optimality criteria // *International Journal of Vehicle Design*. 2002. Vol. 28, no. 4. P. 294-299.
  114. Huang X., Xie Y.M. Bi-directional evolutionary topology optimization of continuum structures with one or multiple materials // *Computational Mechanics*. 2009. Vol. 43, no. 3. P. 393-401.
  115. Deaton J.D., Grandhi R.V. A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization: post 2000 // *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2014. Vol. 49, no. 1. P. 1-38.
  116. Sigmund O., Maute K. Topology optimization approaches. A comparative review // *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2013. Vol. 48, no. 6. P. 1031-1055.
  117. Bendsøe M.P. Optimal shape design as a material distribution problem // *Structural Optimization*. 1989. No. 1. P. 193-202.
  118. Zhou M., Rozvany G.I.N. The COC algorithm, Part II: topological, geometrical and generalized shape optimization // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1991. Vol. 89, no. 1-3. P. 309-336.
  119. Rozvany G.I.N. Aims, scope, methods, history and unified terminology of computer-aided topology optimization in structural mechanics // *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2001. Vol. 21, no. 2. P. 90-108.
  120. Svanberg K. The method of moving asymptotes - a new method for structural optimization // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1987. Vol. 24, no. 2. P. 359-373.
  121. Zilber C. A globally convergent version of the method of moving asymptotes // *Structural Optimization*. 1993. Vol. 6, no. 3. P. 166-174.
  122. Petersson J. A Finite Element Analysis of Optimal Variable Thickness Sheets // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1999. Vol. 36, no. 6. P. 1759-1778.
  123. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1963. Vol. 11, no. 2. P. 127-140.
  124. Tyflopoulos E., Flem D.T., Steinert M., Olsen A. State of the art of generative design and topology optimization and potential research needs // *Proceedings of NordDesign 2018*. Linköping, 2018.
  125. Sigmund O. Morphology-based black and white filters for topology optimization // *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2007. Vol. 33, no. 4-5. P. 401-424.
  126. Stolpe M., Svanberg K. An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization // *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2001. Vol. 22, no. 2. P. 116-124.
  127. Stolpe M., Svanberg K. On the trajectories of penalization methods for topology optimization // *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2001. Vol. 21, no. 2. P. 128-139.

128. Xu H., Guan L., Chen X., Wang L. Guide-weight method for topology optimization of continuum structures including body forces // *Finite Elements in Analysis and Design*. 2013. Vol. 75, no. 1. P. 38-49.
129. Osher S.J., Sethian J.A. Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations // *Journal of Computational Physics*. 1988. Vol. 79, no. 1. P. 12-49.
130. Sethian J.A. *Level Set Methods and Fast Marching Methods: Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1999.
131. Sethian J.A., Wiegmann A. Structural Boundary Design via Level Set and Immersed Interface Methods // *Journal of Computational Physics*. 2000. Vol. 163, no. 2. P. 489-528.
132. Osher S.J., Santosa F. Level Set Methods for Optimization Problems Involving Geometry and Constraints: I. Frequencies of a Two-Density Inhomogeneous Drum // *Journal of Computational Physics*. 2001. Vol. 171, no. 1. P. 272-288.
133. Osher S.J., Fedkiw R. *Level set methods and dynamic implicit surfaces*. New York: Springer, 2003. 275 p.
134. Wang M.Y., Wang X., Guo D. A level set method for structural topology optimization // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2003. Vol. 192, no. 1-2. P. 227-246.
135. Allaire G., Jouve F., Toader A.-M. Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method // *Journal of Computational Physics*. 2004. Vol. 194, no. 1. P. 363-393.
136. Burger M., Hackl B., Ring W. Incorporating topological derivatives into level set methods // *Journal of Computational Physics*. 2004. Vol. 194, no. 1. P. 344-362.
137. Wang X., Mei Y., Wang M.Y. Incorporating Topological Derivatives into Level Set Methods for Structural Topology Optimization // *10th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference*. Albany, New York, 2004.
138. Allaire G., de Gournay F., Jouve F., Toader A.-M. Structural optimization using topological and shape sensitivity via a level set method // *Control and cybernetics*. 2005. Vol. 34, no. 1. P. 59-80.
139. Sokolowski J., Zochowski A. On the Topological Derivative in Shape Optimization // *SIAM Journal on Control and Optimization*. 1999. Vol. 37, no. 4. P. 1251-1272.
140. Bourdin B., Chambolle A. Design-dependent loads in topology optimization // *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*. 2003. Vol. 9. P. 19-48.
141. Bourdin B., Chambolle A. The Phase-Field Method in Optimal Design // *IUTAM Symposium on Topological Design Optimization of Structures, Machines and Materials. Solid Mechanics and Its Applications*. Dordrecht: Springer, 2006. P. 207-215.

142. Wang M.Y., Zhou S. Phase Field: A Variational Method for Structural Topology Optimization // *Computer Modeling in Engineering and Sciences*. 2004. Vol. 6, no. 6. P. 547-566.
143. Ding Y. Shape optimization of structures: a literature survey // *Computers & Structures*. 1986. Vol. 24, no. 6. P. 985-1004.
144. Botkin M.E. Shape Optimization of Plate and Shell Structures // *AIAA Journal*. 1982. Vol. 20, no. 2. P. 268-273.
145. Francavilla A., Ramakrishnan C.V., Zienkiewicz O.C. Optimization of shape to minimize stress concentration // *Journal of Strain Analysis*. 1975. Vol. 10, no. 2. P. 63-70.
146. Imam M.H. Three-dimensional shape optimization // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1982. Vol. 18, no. 5. P. 661-673.
147. Belegundu A.D., Rajan S.D. A shape optimization approach based on natural design variables and shape functions // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1988. Vol. 66, no. 1. P. 87-106.
148. Новожилов В.В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.
149. Lemaitre J., Chaboche J.-L. *Mechanics of solid materials*. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. 556 p.
150. Besson J., Cailletaud G., Chaboche J.-L., Forest S. *Non-Linear Mechanics of Materials*. Netherlands: Springer, 2010. 433 p.
151. ANSYS Mechanical APDL Theory Reference. Canonsburg: SAS IP Inc., 2015.
152. Суслов В.П., Кочанов Ю.П., Спихтаренко В.Н. Строительная механика корабля и основы теории упругости. Л.: Судостроение, 1972. 720 с.
153. Chaboche J.-L. Constitutive equations for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity // *International Journal of Plasticity*. 1989. Vol. 5, no. 3. P. 247-302.
154. Chaboche J.-L. On some modifications of kinematic hardening to improve the description of ratchetting effects // *International Journal of Plasticity*. 1991. Vol. 7, no. 7. P. 661-678.
155. ANSYS Mechanical APDL Material Reference. Canonsburg: SAS IP Inc., 2013.
156. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
157. Owen D.R.J., Prakash A., Zienkiewicz O.C. Finite element analysis of non-linear composite materials by use of overlay systems // *Computers & Structures*. 1974. Vol. 4, no. 6. P. 1251-1267.
158. Voce E. A practical strain-hardening function // *Metallurgica*. 1955. Vol. 51. P. 219-226.
159. Морозов Н.Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 256 с.
160. Копельман Л.А. Основы теории прочности сварных конструкций: учебное пособие. СПб.: Лань, 2010. 464 с.
161. Махутов Н.А. Деформационные критерии и расчёт элементов конструкций на прочность. М.: Машиностроение, 1981. 272 с.



- 162.HBM Prencia nCode DesignLife Theory Guide. Southfield: HBM United Kingdom, 2013.
- 163.Ince A., Glinka G. A modification of Morrow and Smith–Watson–Topper mean stress // *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. 2011. Vol. 34. P. 854-867.
- 164.Niesłony A., Böhm M. Mean stress effect correction using constant stress ratio S-N curves // *International Journal of Fatigue*. 2013. Vol. 52. P. 49-56.
- 165.Smith K.N., Watson P., Topper T.H. A stress-strain function for the fatigue of metals // *Journal of Materials*. 1970. Vol. 5, no. 4. P. 767-778.
- 166.Findley W.N. A theory for the effect of mean stress on fatigue of metals under combined torsion and axial load or bending // *Engineering Materials Research Laboratory, Division of Engineering, Brown University, Providence, 1958*.
- 167.Brown M.W., Miller K.J. A theory for fatigue failure under multiaxial stress-strain conditions // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*. 1973. Vol. 187, no. 1. P. 745-755.
- 168.Fatemi A., Socie D.F. A critical plane approach to multiaxial fatigue damage including out-of-phase loading // *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. 1988. Vol. 11, no. 3. P. 149-165.
- 169.McDiarmid D.L. A general criterion for high cycle multiaxial fatigue failure // *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. 1991. Vol. 14, no. 4. P. 429-453.
- 170.Liu K.C. A Method Based on Virtual Strain-Energy Parameters for Multiaxial Fatigue Life Prediction // *Advances in Multiaxial Fatigue*. Philadelphia: ASTM, 1993. P. 67-84.
- 171.Meggiolaro M.A., Castro J.T.P. Statistical evaluation of strain-life fatigue crack initiation predictions // *International Journal of Fatigue*. 2004. Vol. 26, no. 5. P. 463-476.
- 172.Sines G. Behaviour of metals under complex static and alternating stresses // *Metal Fatigue*. New York: McGraw-Hill, 1959. P. 145-169.
- 173.Crossland B. Effect of large hydrostatic pressures on the torsional fatigue strength of an alloy steel // *Proceedings of the International Conference on Fatigue of Metals*. London, 1956.
- 174.Sellenet N. Code\_Aster Version 13. Operator CALC\_CHAMP // URL: [https://www.code-aster.org/V2/doc/v13/en/man\\_u/u4/u4.81.04.pdf](https://www.code-aster.org/V2/doc/v13/en/man_u/u4/u4.81.04.pdf) (дата обращения: 26.04.2019).
- 175.Vallance L. Quick Fatigue Tool For MATLAB – Analysis User’s Guide, 2019.
- 176.Meggiolaro M.A., Castro J.T.P., Wu H. Invariant-Based and Critical-Plane Rainflow Approaches for Fatigue Life Prediction under Multiaxial Variable Amplitude Loading // *Procedia Engineering*. 2015. Vol. 101. P. 69-76.
- 177.Meggiolaro M.A., Castro J.T.P. The moment of inertia method to calculate equivalent ranges in non-proportional tension-torsion histories // *Journal of Materials Research and Technology*. 2015. Vol. 4, no. 3. P. 229-234.
- 178.Itoh T. Multiaxial Low Cycle Fatigue Life Prediction under Nonproportional Loading // *Mem. Faculty of Engineering of the Fukui University*. 2001. Vol. 49, no. 1. P. 37-44.

179. Reis L., Li B., Freitas M. Fatigue behaviour of a structural steel under non-proportional multiaxial loading // *Ciência e Tecnologia dos Materiais*. 2008. Vol. 20, no. 1-2. P. 87-91.
180. Filippini M., Foletti S., Pasquero G. Assessment of multiaxial fatigue life prediction methodologies for Inconel 718 // *Procedia Engineering*. 2010. Vol. 2, no. 1. P. 2347-2356.
181. Tokimasa K. Creep-Fatigue Life Evaluation for Materials Subjected to Nonproportionally Combined Tension and Torsion // *Procedia Engineering*. 2011. Vol. 10. P. 2387-2392.
182. Sága M., Kopas P., Uhrčík M. Modeling and Experimental Analysis of the Aluminium Alloy Fatigue Damage in the case of Bending – Torsion Loading // *Procedia Engineering*. 2012. Vol. 48. P. 599-606.
183. Itoh T., Fukumoto K., Hagi H., Itoh A., Saitoh D. Low Cycle Fatigue Damage of Mod.9Cr-1Mo Steel under Non-proportional Multiaxial Loading // *Procedia Engineering*. 2013. Vol. 55. P. 457-462.
184. Anes V., Reis L., Freitas M. Multiaxial Fatigue Damage Accumulation under Variable Amplitude Loading Conditions // *Procedia Engineering*. 2015. Vol. 101. P. 117-125.
185. Anes V., Reis L., Freitas M. Asynchronous multiaxial fatigue damage evaluation // *Procedia Engineering*. 2015. Vol. 101. P. 421-429.
186. Morishita T., Itoh T., Bao Z. Fatigue Life of Type 316 Stainless Steel under Wide Ranged Multiaxial Loading // *Procedia Engineering*. 2015. Vol. 130. P. 1730-1741.
187. Videira H., Anes V., Freitas M., Reis L. Characterization and evaluation of the mechanical behaviour of the magnesium alloy AZ31B in multiaxial fatigue in the presence of a notch // *Procedia Structural Integrity*. 2016. Vol. 1. P. 197-204.
188. Soares H., Anes V., Freitas M., Reis L. Fatigue life of a railway wheel under uniaxial and multiaxial loadings // *Procedia Structural Integrity*. 2018. Vol. 13. P. 1786-1791.
189. Engin Z., Coker D. Comparison of Equivalent Stress Methods with Critical Plane Approaches for Multiaxial High Cycle Fatigue Assessment // *Procedia Structural Integrity*. 2017. Vol. 5. P. 1229-1236.
190. ГОСТ 25.101-83. Расчеты и испытания на прочность. Методы схематизации случайных процессов нагружения элементов машин и конструкций и статистического представления результатов. М.: Стандартиформ, 1983.
191. Правила классификации и постройки высокоскоростных судов, СПб.: Российский морской регистр судоходства, 2018.
192. Зиганченко П.П., Кузовенков Б.П., Тарасов И.К. Суда на подводных крыльях: Конструирование и прочность. Л.: Судостроение, 1981. 312 с.
193. ГОСТ Р 5833-2018. Панели прессованные оребренные из алюминиевых сплавов. Технические условия. М.: Стандартиформ, 2018.
194. ГОСТ Р 56043-2014. Профили прессованные бульбообразные полосового

симметричного и полосового несимметричного сечений с трапециевидной головкой из алюминиевых сплавов. Сортамент. М.: Стандартинформ, 2014.

195. Правила классификации и постройки морских судов. Часть III. Устройства, оборудование и снабжение. СПб.: Российский морской регистр судоходства, 2019.
196. Правила о грузовой марке морских судов. СПб.: Российский морской регистр судоходства, 2019.
197. Wallin M., Ristinmaa M. Boundary effects in a phase-field approach to topology optimization // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2014. Vol. 278. P. 145-159.
198. Rozvany G., Lewiński T. *Topology Optimization in Structural and Continuum Mechanics*. Springer: Vienna, 2014. 471 p.
199. Bletzinger K.-U., Firl M., Linhard J., Wüchner R. Optimal shapes of mechanically motivated surfaces // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2010. Vol. 199, no. 5-8. P. 324-333.
200. Seo Y.-D., Kim H.-J., Youn S.-K. Shape optimization and its extension to topological design based on isogeometric analysis // *International Journal of Solids and Structures*. 2010. Vol. 47, no. 11-12. P. 1618-1640.
201. Blank L., Garcke H., Sarbu L., Srisupattarawanit T., Styles V., Voigt A. Phase-field Approaches to Structural Topology Optimization // *International Series of Numerical Mathematics*. 2012. Vol. 160. P. 245-256.
202. Svanberg K. On the convexity and concavity of compliances // *Structural Optimization*. 1994. Vol. 7. P. 42-46.
203. Le C., Bruns T., Tortorelli D. A gradient-based, parameter-free approach to shape optimization // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2011. Vol. 200, no. 9-12. P. 985-996.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А. ТЕКСТ ПРОГРАММЫ ОПТИМИЗАЦИИ ЛЕДОВОГО ПЕРЕКРЫТИЯ

Ниже приведён текст файла Model.mac, содержащий комментарии.

```

/NOPR                ! Подавление протоколирования последующих команд
/PREP7               ! Вход в предобработчик
/TITLE,'Optimal covering'
!
! Глобальные постоянные
E      = 206e9        ! Модуль Юнга, Па
nu     = 0.3          ! Коэффициент Пуассона [б/р]
rho    = 7850         ! Плотность, кг/м3
yieldS = 235e6        ! Предел текучести, Па
ultimS = 360e6       ! Предел прочности (временное сопротивление разрушению), Па
delta  = 20e-2        ! Предельная деформация [б/р]
a      = 4.75         ! Ширина панели, м
b      = 2.76         ! Высота панели, м
d      = 2.9          ! Ширина полосы ледового давления, м
h      = 0.7          ! Высота полосы ледового давления, м
Nx     = 5            ! Количество вертикальных рёбер жёсткости
Ny     = 4            ! Количество горизонтальных рёбер жёсткости
!
! Вычисляемые параметры
p      = 3.6e6/d/h*1.4! Величина ледового давления, Па
up     = (b + h)/2    ! Верхняя граница полосы ледового давления, м
down   = (b - h)/2    ! Нижняя граница полосы ледового давления, м
lft    = (a - d)/2    ! Левая граница полосы ледового давления, м
rght   = (a + d)/2    ! Правая граница полосы ледового давления, м
!
! Переменные параметры
prm01  = 20e-3        ! Толщина обшивки, м
prm02  = 140e-3       ! Ширина пояска средних вертикальных рёбер жёсткости, м
prm03  = 380e-3       ! Высота стенки средних вертикальных рёбер жёсткости, м
prm04  = 25e-3        ! Толщина пояска средних вертикальных рёбер жёсткости, м
prm05  = 10e-3        ! Толщина стенки средних вертикальных рёбер жёсткости, м
prm06  = prm02        ! Ширина пояска крайних вертикальных рёбер жёсткости, м
prm07  = prm03        ! Высота стенки крайних вертикальных рёбер жёсткости, м
prm08  = prm04        ! Толщина пояска крайних вертикальных рёбер жёсткости, м
prm09  = prm05        ! Толщина стенки крайних вертикальных рёбер жёсткости, м
prm10  = 122e-3       ! Ширина пояска средних горизонтальных рёбер жёсткости, м
prm11  = 250e-3       ! Высота стенки средних горизонтальных рёбер жёсткости, м
prm12  = 20e-3        ! Толщина пояска средних горизонтальных рёбер жёсткости, м
prm13  = 08e-3        ! Толщина стенки средних горизонтальных рёбер жёсткости, м
prm14  = prm10        ! Ширина пояска крайних горизонтальных рёбер жёсткости, м
prm15  = prm11        ! Высота стенки крайних горизонтальных рёбер жёсткости, м
prm16  = prm12        ! Толщина пояска крайних горизонтальных рёбер жёсткости, м
prm17  = prm13        ! Толщина стенки крайних горизонтальных рёбер жёсткости, м
!
! Служебные параметры
t      = prm01        ! Толщина обшивки, м
bfx1   = prm02        ! Ширина пояска средних вертикальных рёбер жёсткости, м
dwx1   = prm03        ! Высота стенки средних вертикальных рёбер жёсткости, м
dfx1   = prm04        ! Толщина пояска средних вертикальных рёбер жёсткости, м
bwx1   = prm05        ! Толщина стенки средних вертикальных рёбер жёсткости, м
bfx2   = prm06        ! Ширина пояска крайних вертикальных рёбер жёсткости, м
dwx2   = prm07        ! Высота стенки крайних вертикальных рёбер жёсткости, м
dfx2   = prm08        ! Толщина пояска крайних вертикальных рёбер жёсткости, м
bwx2   = prm09        ! Толщина стенки крайних вертикальных рёбер жёсткости, м
bfy1   = prm10        ! Ширина пояска средних горизонтальных рёбер жёсткости, м
dwy1   = prm11        ! Высота стенки средних горизонтальных рёбер жёсткости, м

```

```

dfy1 = prm12      ! Толщина пояска средних горизонтальных рёбер жёсткости, м
bwy1 = prm13      ! Толщина стенки средних горизонтальных рёбер жёсткости, м
bfy2 = prm14      ! Ширина пояска крайних горизонтальных рёбер жёсткости, м
dwy2 = prm15      ! Высота стенки крайних горизонтальных рёбер жёсткости, м
dfy2 = prm16      ! Толщина пояска крайних горизонтальных рёбер жёсткости, м
bwy2 = prm17      ! Толщина стенки крайних горизонтальных рёбер жёсткости, м
!=====
! Проверка корректности параметров
!
Nx = max(Nx,1)    ! Число вертикальных рёбер не менее одного
Ny = max(Ny,1)    ! Число горизонтальных рёбер не менее одного
Nx = nint(Nx)     ! Округление количества вертикальных рёбер жёсткости к
ближайшему целому
Ny = nint(Ny)     ! Округление количества горизонтальных рёбер жёсткости к
ближайшему целому
!
! Для средних вертикальных рёбер жёсткости
bwx1 = min(bwx1,a/(Nx + 1))! Стенка не может быть очень толстой
bfx1 = max(bfx1,bwx1)     ! Ширина пояска не меньше толщины стенки
bfx1 = min(bfx1,a/(Nx + 1))! Пояски соседних рёбер не должны перекрывать друг друга
!
! Для крайних вертикальных рёбер жёсткости
bwx2 = min(bwx2,a/(Nx + 1))! Стенка не может быть очень толстой
bfx2 = max(bfx2,bwx2)     ! Ширина пояска не меньше толщины стенки
bfx2 = min(bfx2,a/(Nx + 1))! Пояски соседних рёбер не должны перекрывать друг друга
!
! Для средних горизонтальных рёбер жёсткости
bwy1 = min(bwy1,b/(Ny + 1))! Стенка не может быть очень толстой
bfy1 = max(bfy1,bwy1)     ! Ширина пояска не меньше толщины стенки
bfy1 = min(bfy1,b/(Ny + 1))! Пояски соседних рёбер не должны перекрывать друг друга
!
! Для крайних горизонтальных рёбер жёсткости
bwy2 = min(bwy2,b/(Ny + 1))! Стенка не может быть очень толстой
bfy2 = max(bfy2,bwy2)     ! Ширина пояска не меньше толщины стенки
bfy2 = min(bfy2,b/(Ny + 1))! Пояски соседних рёбер не должны перекрывать друг друга
!=====
! Добавление элементов в таблицу типов конечных элементов
ET,1,SHELL281
! Настройка добавленного элемента SHELL281
KEYOPT,1,1,0
KEYOPT,1,8,2
KEYOPT,1,9,0
!=====
! Задание свойств материала
MP,EX ,1,E      ! Задание модуля Юнга
MP,PRXY,1,nu   ! Задание коэффициента Пуассона
MP,DENS,1,rho  ! Задание плотности
TB,BKIN,1,1,2,1 ! Модель линейного кинематического упрочнения
TBTEMP,0      ! Температура
TBDATA,1,yieldS,E/100 ! Задание предела текучести и касательного модуля
!=====
! Задание сечений
SECTYPE,1,SHELL,,Cover! Задание сечения обшивки
SECOFFSET, TOP      ! Положение сечения относительно поверхности
SECDATA,t,1,0,9     ! Толщина сечения, номер материала и количество точек
интегрирования по толщине
!
SECTYPE,2,SHELL,,VertIn ! Задание сечения стенки средних вертикальных рёбер
жёсткости
SECOFFSET,MID
SECDATA,bwx1,1,0,9
!
SECTYPE,3,SHELL,,VertCnt ! Задание сечения стенки центрального вертикального ребра
жёсткости

```

```

SECOFFSET, TOP
SECDATA, bwx1/2, 1, 0, 9
!
SECTYPE, 4, SHELL, , VertOut ! Задание сечения стенки крайних вертикальных рёбер
жёсткости
SECOFFSET, MID
SECDATA, bwx2, 1, 0, 9
!
SECTYPE, 5, SHELL, , HorizIn ! Задание сечения стенки средних горизонтальных рёбер
жёсткости
SECOFFSET, MID
SECDATA, bwy1, 1, 0, 9
!
SECTYPE, 6, SHELL, , HorizCnt ! Задание сечения стенки центрального горизонтального
рёбра жёсткости
SECOFFSET, BOT
SECDATA, bwy1/2, 1, 0, 9
!
SECTYPE, 7, SHELL, , HorizOut ! Задание сечения стенки крайних горизонтальных рёбер
жёсткости
SECOFFSET, MID
SECDATA, bwy2, 1, 0, 9
!
SECTYPE, 8, SHELL, , FlngVIn ! Задание сечения пояска средних вертикальных рёбер
жёсткости
SECOFFSET, BOT
SECDATA, dfx1, 1, 0, 9
!
SECTYPE, 9, SHELL, , FlngVOut ! Задание сечения пояска крайних вертикальных рёбер
жёсткости
SECOFFSET, BOT
SECDATA, dfx2, 1, 0, 9
!
SECTYPE, 10, SHELL, , FlngHIn ! Задание сечения пояска средних горизонтальных рёбер
жёсткости
SECOFFSET, BOT
SECDATA, dfy1, 1, 0, 9
!
SECTYPE, 11, SHELL, , FlngHOut ! Задание сечения пояска крайних горизонтальных рёбер
жёсткости
SECOFFSET, BOT
SECDATA, dfy2, 1, 0, 9
!
=====
! Построение геометрической модели
*IF, mod(Nx, 2), EQ, 1, THEN ! Если есть центральное вертикальное ребро жёсткости, то
  dx = 0 ! не требуется центральное вертикальное разбиение,
*ELSE ! иначе
  dx = 1 ! дополнительно разбиваем панель
*ENDIF
!
! Создание вектора координат вертикальных рёбер жёсткости
*DIM, PointX, ARRAY, Nx + 2 + dx
! Задание в цикле координат вертикальных рёбер жёсткости
*DO, i, 1, Nx + 2
  PointX(i) = a*(i - 1)/(Nx + 1) ! Равномерное разбиение
*ENDDO
i=
!
*IF, dx, EQ, 1, THEN ! Если нет центрального вертикального ребра жёсткости, то
  PointX(Nx + 2 + dx) = a/2! задаём центральную координату
*ENDIF
!
! Сортировка методом пузырька
*DO, i, 1, Nx + 2 + dx

```

```

PointXMin = PointX(i)
*DO, j, i + 1, Nx + 2 + dx
  *IF, PointXMin, GT, PointX(j), THEN
    PointXMin = PointX(j)
    PointX(j) = PointX(i)
    PointX(i) = PointXMin
  *ENDIF
*ENDDO
*ENDDO
i=
j=
PointXMin=
!
*IF, mod(Ny, 2), EQ, 1, THEN ! Если есть центральное горизонтальное ребро жёсткости, то
  dy = 0 ! не требуется центральное горизонтальное разбиение,
*ELSE ! иначе
  dy = 1 ! дополнительно разбиваем панель
*ENDIF
!
! Создание вектора координат горизонтальных рёбер жёсткости
*DIM, PointY, ARRAY, Ny + 2 + dy
! Задание в цикле координат горизонтальных рёбер жёсткости
*DO, j, 1, Ny + 2
  PointY(j) = b*(j - 1)/(Ny + 1) ! Равномерное разбиение
*ENDDO
j=
!
*IF, dy, EQ, 1, THEN ! Если нет центрального горизонтального ребра жёсткости, то
  PointY(Ny + 2 + dy) = b/2! задаём центральную координату
*ENDIF
!
! Сортировка методом пузырька
*DO, i, 1, Ny + 2 + dy
  PointYMin = PointY(i)
  *DO, j, i + 1, Ny + 2 + dy
    *IF, PointYMin, GT, PointY(j), THEN
      PointYMin = PointY(j)
      PointY(j) = PointY(i)
      PointY(i) = PointYMin
    *ENDIF
  *ENDDO
*ENDDO
i=
j=
PointYMin=
!
! Построение вертикальных рёбер жёсткости
! Построение крайнего вертикального ребра жёсткости
! Построение стенки крайнего вертикального ребра жёсткости
K1 = 1 ! Номер первой точки
K, K1, PointX(2), 0, 0 ! Создание первой точки
K2 = K1 + 1 ! Номер второй точки
K, K2, PointX(2), b/2, 0 ! Создание второй точки
K3 = K2 + 1 ! Номер третьей точки
K, K3, PointX(2), b/2, -dwx2 ! Создание третьей точки
K4 = K3 + 1 ! Номер четвёртой точки
K, K4, PointX(2), 0, -dwx2 ! Создание четвёртой точки
A, K1, K2, K3, K4 ! Создание по четырём точкам стенки крайнего вертикального
ребра жёсткости
! Построение пояска крайнего вертикального ребра жёсткости
K1 = K4 + 1 ! Номер первой точки
K, K1, PointX(2) - bfx2/2, 0, -dwx2 ! Создание первой точки
K2 = K1 + 1 ! Номер второй точки
K, K2, PointX(2) - bfx2/2, b/2, -dwx2 ! Создание второй точки

```

```

A,K4,K3,K2,K1      ! Создание по четырём точкам левой половины пояска крайнего
вертикального ребра жёсткости
K1 = K2 + 1        ! Номер первой точки
K,K1,PointX(2) + bfx2/2, 0,-dwx2 ! Создание первой точки
K2 = K1 + 1        ! Номер второй точки
K,K2,PointX(2) + bfx2/2,b/2,-dwx2 ! Создание второй точки
A,K1,K2,K3,K4      ! Создание по четырём точкам правой половины пояска крайнего
вертикального ребра жёсткости
! Построение средних вертикальных рёбер жёсткости
*DO,i,3,(Nx + 1 - dx)/2 + 1 ! Цикл по вертикальным рёбрам жёсткости
! Построение стенки среднего вертикального ребра жёсткости
K1 = K2 + 1        ! Номер первой точки
K,K1,PointX(i), 0,0 ! Создание первой точки
K2 = K1 + 1        ! Номер второй точки
K,K2,PointX(i),b/2,0 ! Создание второй точки
K3 = K2 + 1        ! Номер третьей точки
K,K3,PointX(i),b/2,-dwx1 ! Создание третьей точки
K4 = K3 + 1        ! Номер четвёртой точки
K,K4,PointX(i), 0,-dwx1 ! Создание четвёртой точки
A,K1,K2,K3,K4 ! Создание по четырём точкам стенки среднего вертикального ребра
жёсткости
! Построение пояска среднего вертикального ребра жёсткости
K1 = K4 + 1        ! Номер первой точки
K,K1,PointX(i) - bfx1/2, 0,-dwx1 ! Создание первой точки
K2 = K1 + 1        ! Номер второй точки
K,K2,PointX(i) - bfx1/2,b/2,-dwx1 ! Создание второй точки
A,K4,K3,K2,K1      ! Создание по четырём точкам левой половины пояска среднего
вертикального ребра жёсткости
K1 = K2 + 1        ! Номер первой точки
K,K1,PointX(i) + bfx1/2, 0,-dwx1 ! Создание первой точки
K2 = K1 + 1        ! Номер второй точки
K,K2,PointX(i) + bfx1/2,b/2,-dwx1 ! Создание второй точки
A,K1,K2,K3,K4      ! Создание по четырём точкам правой половины пояска среднего
вертикального ребра жёсткости
*ENDDO
i=
!
! Построение горизонтальных рёбер жёсткости
! Построение крайнего горизонтального ребра жёсткости
! Построение стенки крайнего горизонтального ребра жёсткости
K1 = K2 + 1        ! Номер первой точки
K,K1, 0,PointY(2),0 ! Создание первой точки
K2 = K1 + 1        ! Номер второй точки
K,K2,a/2,PointY(2),0 ! Создание второй точки
K3 = K2 + 1        ! Номер третьей точки
K,K3,a/2,PointY(2),-dwy2 ! Создание третьей точки
K4 = K3 + 1        ! Номер четвёртой точки
K,K4, 0,PointY(2),-dwy2 ! Создание четвёртой точки
A,K1,K2,K3,K4 ! Создание по четырём точкам стенки крайнего горизонтального ребра
жёсткости
! Построение пояска крайнего горизонтального ребра жёсткости
K1 = K4 + 1        ! Номер первой точки
K,K1, 0,PointY(2) - bfy2/2,-dwy2 ! Создание первой точки
K2 = K1 + 1        ! Номер второй точки
K,K2,a/2,PointY(2) - bfy2/2,-dwy2 ! Создание второй точки
A,K1,K2,K3,K4      ! Создание по четырём точкам нижней половины пояска крайнего
горизонтального ребра жёсткости
K1 = K2 + 1        ! Номер первой точки
K,K1, 0,PointY(2) + bfy2/2,-dwy2 ! Создание первой точки
K2 = K1 + 1        ! Номер второй точки
K,K2,a/2,PointY(2) + bfy2/2,-dwy2 ! Создание второй точки
A,K4,K3,K2,K1      ! Создание по четырём точкам верхней половины пояска крайнего
горизонтального ребра жёсткости
! Построение средних горизонтальных рёбер жёсткости

```



```

*DO, j, 3, (Ny + 1 - dy)/2 + 1      ! Цикл по горизонтальным рёбрам жёсткости
! Построение стенки среднего горизонтального ребра жёсткости
K1 = K2 + 1                          ! Номер первой точки
K, K1, 0, PointY(j), 0                ! Создание первой точки
K2 = K1 + 1                          ! Номер второй точки
K, K2, a/2, PointY(j), 0              ! Создание второй точки
K3 = K2 + 1                          ! Номер третьей точки
K, K3, a/2, PointY(j), -dwy1         ! Создание третьей точки
K4 = K3 + 1                          ! Номер четвёртой точки
K, K4, 0, PointY(j), -dwy1           ! Создание четвёртой точки
A, K1, K2, K3, K4                    ! Создание по четырём точкам стенки среднего
горизонтального ребра жёсткости
! Построение пояска среднего горизонтального ребра жёсткости
K1 = K4 + 1                          ! Номер первой точки
K, K1, 0, PointY(j) - bfy1/2, -dwy1  ! Создание первой точки
K2 = K1 + 1                          ! Номер второй точки
K, K2, a/2, PointY(j) - bfy1/2, -dwy1 ! Создание второй точки
A, K1, K2, K3, K4                    ! Создание по четырём точкам нижней половины пояска среднего
горизонтального ребра жёсткости
K1 = K2 + 1                          ! Номер первой точки
K, K1, 0, PointY(j) + bfy1/2, -dwy1  ! Создание первой точки
K2 = K1 + 1                          ! Номер второй точки
K, K2, a/2, PointY(j) + bfy1/2, -dwy1 ! Создание второй точки
A, K4, K3, K2, K1                    ! Создание по четырём точкам верхней половины пояска среднего
горизонтального ребра жёсткости
*ENDDO
j=
!
! Удаление возможных лишних частей центральных рёбер жёсткости
ASEL, S, LOC, X, 0, a/2 ! Выбор всех поверхностей левой половины
ASEL, R, LOC, Y, 0, b/2 ! Выбор всех поверхностей нижней половины
ASEL, INVE                ! Инверсия выбора
ADELE, ALL, , , 1        ! Удаление всех выбранных поверхностей, включая линии и точки
!
! Построение обшивки
K1 = K2 + 1              ! Номер первой точки
K, K1, 0, 0, 0          ! Создание первой точки
K2 = K1 + 1              ! Номер второй точки
K, K2, a/2, 0, 0        ! Создание второй точки
K3 = K2 + 1              ! Номер третьей точки
K, K3, a/2, b/2, 0      ! Создание третьей точки
K4 = K3 + 1              ! Номер четвёртой точки
K, K4, 0, b/2, 0        ! Создание четвёртой точки
A, K1, K2, K3, K4      ! Создание по четырём точкам обшивки
K1=
K2=
K3=
K4=
!
! Взаимное разбиение рёбер жёсткости
ASEL, S, LOC, Y, PointY(1)
*DO, j, (Nx + 1 - dx)/2, (Nx - dx)/2 + (Ny - dy)/2 ! Цикл по горизонтальным рёбрам
жёсткости
ASEL, A, AREA, , 3*j + 1 ! Довыбор стенки горизонтального ребра жёсткости
*ENDDO
ASEL, A, LOC, Z, -dwy2    ! Довыбор пояска крайнего горизонтального ребра жёсткости
ASEL, A, LOC, Z, -dwy1    ! Довыбор поясков средних горизонтальных рёбер жёсткости
ASEL, A, LOC, Z, 0        ! Довыбор обшивки
*DO, i, 1, (Nx - 1 + dx)/2 ! Цикл по вертикальным рёбрам жёсткости
K1 = 8*(i - 1) + 1       ! Номер первой точки
K2 = 8*(i - 1) + 2       ! Номер второй точки
K3 = 8*(i - 1) + 3       ! Номер третьей точки
KWPLANE, -1, K1, K2, K3  ! Задание рабочей плоскости по трём точкам
ASBW, ALL                ! Разбиение всех выбранных поверхностей рабочей плоскостью

```

```

*ENDDO
i=
K1=
K2=
K3=
ASEL, S, LOC, X, PointX(1)
*DO, i, 1, (Nx + 1 - dx)/2          ! Цикл по                вертикальным рёбрам
жёсткости
  ASEL, A, AREA, , 3*(i - 1) + 1    ! Довыбор стенки                вертикального ребра
жёсткости
*ENDDO
ASEL, A, LOC, Z, -dwx2              ! Довыбор пояска крайнего вертикального ребра
жёсткости
ASEL, A, LOC, Z, -dwx1              ! Довыбор поясков средних вертикального рёбер
жёсткости
ASEL, A, LOC, Z, 0                  ! Довыбор обшивки
*DO, j, 1, (Ny - 1 + dy)/2          ! Цикл по горизонтальным рёбрам жёсткости
  K1 = 8*((Nx + 1 - dx)/2 + j - 1) + 1 ! Номер первой точки
  K2 = 8*((Nx + 1 - dx)/2 + j - 1) + 2 ! Номер второй точки
  K3 = 8*((Nx + 1 - dx)/2 + j - 1) + 3 ! Номер третьей точки
  KWPLANE, -1, K1, K2, K3           ! Задание рабочей плоскости по трём точкам
  ASBW, ALL                        ! Разбиение всех выбранных поверхностей рабочей плоскостью
*ENDDO
j=
K1=
K2=
K3=
!
! Разбиение стенок рёбер жёсткости
ASEL, S, LOC, X, PointX(1)
ASEL, A, LOC, X, PointX(2)          ! Довыбор                стенки крайнего вертикального
ребра жёсткости
ASEL, R, LOC, Y, PointY(1), PointY(2) ! Подвыбор части стенки крайнего вертикального
ребра жёсткости
temp = -min(dwx2, dwy2)             ! Определение минимальной высоты стенки
WPLANE, -1, 0, 0, temp, 1, 0, temp, 1, 1, temp ! Задание рабочей плоскости по координатам
*GET, aCheck, AREA, 0, COUNT        ! Определение количества выбранных поверхностей
*IF, aCheck, GT, 0, THEN            ! Если выбрана хотя бы одна поверхность, то
  ASBW, ALL                          ! разбиваем все выбранные поверхности рабочей
плоскостью
*ENDIF
ASEL, S, LOC, X, PointX(1)
ASEL, A, LOC, X, PointX(2)          ! Довыбор                стенки крайнего вертикального
ребра жёсткости
ASEL, R, LOC, Y, PointY(2), PointY(3) ! Подвыбор части стенки крайнего вертикального
ребра жёсткости
tmp = -min(dwx2, dwy1)              ! Определение минимальной высоты стенки
WPLANE, -1, 0, PointY(2), tmp, 1, PointY(2), tmp, 1, PointY(3), tmp ! Задание рабочей
плоскости по координатам
*GET, aCheck, AREA, 0, COUNT        ! Определение количества выбранных поверхностей
*IF, aCheck, GT, 0, THEN            ! Если выбрана хотя бы одна поверхность, то
  ASBW, ALL                          ! разбиваем все выбранные поверхности рабочей
плоскостью
*ENDIF
ASEL, S, LOC, X, PointX(1)
ASEL, A, LOC, X, PointX(2)          ! Довыбор                стенки крайнего вертикального
ребра жёсткости
ASEL, R, LOC, Y, PointY(3), b       ! Подвыбор части стенки крайнего вертикального
ребра жёсткости
WPLANE, -1, 0, 0, tmp, 1, 0, tmp, 1, 1, tmp ! Задание рабочей плоскости по координатам
*GET, aCheck, AREA, 0, COUNT        ! Определение количества выбранных поверхностей
*IF, aCheck, GT, 0, THEN            ! Если выбрана хотя бы одна поверхность, то
  ASBW, ALL                          ! разбиваем все выбранные поверхности рабочей
плоскостью

```

```

*ENDIF
ASEL, S, LOC, X, PointX(1)
*DO, i, 3, (Nx + 1 - dx)/2 + 1      ! Цикл по                вертикальным рёбрам
жёсткости
    ASEL, A, LOC, X, PointX(i)      ! Довыбор стенки среднего вертикального ребра
жёсткости
*ENDDO
ASEL, R, LOC, Y, PointY(1), PointY(2) ! Подвыбор части стенок средних вертикальных рёбер
жёсткости
temp = -min(dwx1, dwy2)             ! Определение минимальной высоты стенки
WPLANE, -1, 0, 0, temp, 1, 0, temp, 1, 1, temp ! Задание рабочей оплоскости по координатам
*GET, aCheck, AREA, 0, COUNT        ! Определение количества выбранных поверхностей
*IF, aCheck, GT, 0, THEN             ! Если выбрана хотя бы одна поверхность, то
    ASBW, ALL                        ! разбиваем все выбранные поверхности рабочей
плоскостью
*ENDIF
ASEL, S, LOC, X, PointX(1)
*DO, i, 3, (Nx + 1 - dx)/2 + 1      ! Цикл по                вертикальным рёбрам
жёсткости
    ASEL, A, LOC, X, PointX(i)      ! Довыбор стенки среднего вертикального ребра
жёсткости
*ENDDO
ASEL, R, LOC, Y, PointY(2), PointY(3) ! Подвыбор части стенок средних вертикальных рёбер
жёсткости
tmp = -min(dwx1, dwy1)              !
WPLANE, -1, 0, PointY(2), tmp, 1, PointY(2), tmp, 1, PointY(3), tmp ! Задание рабочей
плоскости по координатам
*GET, aCheck, AREA, 0, COUNT        ! Определение количества выбранных поверхностей
*IF, aCheck, GT, 0, THEN             ! Если выбрана хотя бы одна поверхность, то
    ASBW, ALL                        ! разбиваем все выбранные поверхности рабочей
плоскостью
*ENDIF
ASEL, S, LOC, X, PointX(1)
*DO, i, 3, (Nx + 1 - dx)/2 + 1      ! Цикл по                вертикальным рёбрам
жёсткости
    ASEL, A, LOC, X, PointX(i)      ! Довыбор стенки среднего вертикального ребра
жёсткости
*ENDDO
ASEL, R, LOC, Y, PointY(3), b        ! Подвыбор части стенки крайнего вертикального
ребра жёсткости
WPLANE, -1, 0, 0, tmp, 1, 0, tmp, 1, 1, tmp ! Задание рабочей плоскости по координатам
*GET, aCheck, AREA, 0, COUNT        ! Определение количества выбранных поверхностей
*IF, aCheck, GT, 0, THEN             ! Если выбрана хотя бы одна поверхность, то
    ASBW, ALL                        ! разбиваем все выбранные поверхности рабочей
плоскостью
*ENDIF
aCheck=
temp=
tmp=
i=
ASEL, S, LOC, Y, PointY(1)
ASEL, A, LOC, Y, PointY(2)          ! Довыбор                стенки крайнего горизонтального
ребра жёсткости
ASEL, R, LOC, X, PointX(1), PointX(2) ! Подвыбор части стенки крайнего горизонтального
ребра жёсткости
temp = -min(dwy2, dwx2)             ! Определение минимальной высоты стенки
WPLANE, -1, 0, 0, temp, 0, 1, temp, 1, 1, temp ! Задание рабочей плоскости по координатам
*GET, aCheck, AREA, 0, COUNT        ! Определение количества выбранных поверхностей
*IF, aCheck, GT, 0, THEN             ! Если выбрана хотя бы одна поверхность, то
    ASBW, ALL                        ! разбиваем все выбранные поверхности рабочей
плоскостью
*ENDIF
ASEL, S, LOC, Y, PointY(1)
ASEL, A, LOC, Y, PointY(2)          ! Довыбор                стенки крайнего горизонтального

```

```

ребра жёсткости
ASEL, R, LOC, X, PointX(2), PointX(3) ! Подвыбор части стенки крайнего горизонтального
ребра жёсткости
tmp = -min(dwy2, dwx1) ! Определение минимальной высоты стенки
WPLANE, -1, PointX(2), 0, temp, PointX(2), 1, temp, PointX(3), 1, tmp ! Задание рабочей
плоскости по координатам
*GET, aCheck, AREA, 0, COUNT ! Определение количества выбранных поверхностей
*IF, aCheck, GT, 0, THEN ! Если выбрана хотя бы одна поверхность, то
    ASBW, ALL ! разбиваем все выбранные поверхности рабочей
плоскостью
*ENDIF
ASEL, S, LOC, Y, PointY(1)
ASEL, A, LOC, Y, PointY(2) ! Довыбор стенки крайнего горизонтального
ребра жёсткости
ASEL, R, LOC, X, PointX(3), a ! Подвыбор части стенки крайнего горизонтального
ребра жёсткости
WPLANE, -1, 0, 0, tmp, 0, 1, tmp, 1, 1, tmp ! Задание рабочей плоскости по координатам
*GET, aCheck, AREA, 0, COUNT ! Определение количества выбранных поверхностей
*IF, aCheck, GT, 0, THEN ! Если выбрана хотя бы одна поверхность, то
    ASBW, ALL ! разбиваем все выбранные поверхности рабочей
плоскостью
*ENDIF
ASEL, S, LOC, Y, PointY(1)
*DO, j, 3, (Ny + 1 - dy) / 2 + 1 ! Цикл по горизонтальным рёбрам
жёсткости
    ASEL, A, LOC, Y, PointY(j) ! Довыбор стенки среднего горизонтального ребра
жёсткости
*ENDDO
ASEL, R, LOC, X, PointX(1), PointX(2) ! Подвыбор части стенок горизонтальных рёбер
жёсткости
temp = -min(dwy1, dwx2) ! Определение минимальной высоты стенки
WPLANE, -1, 0, 0, temp, 0, 1, temp, 1, 1, temp ! Задание рабочей плоскости по координатам
*GET, aCheck, AREA, 0, COUNT ! Определение количества выбранных поверхностей
*IF, aCheck, GT, 0, THEN ! Если выбрана хотя бы одна поверхность, то
    ASBW, ALL ! разбиваем все выбранные поверхности рабочей
плоскостью
*ENDIF
ASEL, S, LOC, Y, PointY(1)
*DO, j, 3, (Ny + 1 - dy) / 2 + 1 ! Цикл по горизонтальным рёбрам
жёсткости
    ASEL, A, LOC, Y, PointY(j) ! Довыбор стенки среднего горизонтального ребра
жёсткости
*ENDDO
ASEL, R, LOC, X, PointX(2), PointX(3) ! Подвыбор части стенок горизонтальных рёбер
жёсткости
tmp = -min(dwy1, dwx1) ! Определение минимальной высоты стенки
WPLANE, -1, PointX(2), 0, temp, PointX(2), 1, temp, PointX(3), 1, tmp ! Задание рабочей
плоскости по координатам
*GET, aCheck, AREA, 0, COUNT ! Определение количества выбранных поверхностей
*IF, aCheck, GT, 0, THEN ! Если выбрана хотя бы одна поверхность, то
    ASBW, ALL ! разбиваем все выбранные поверхности рабочей
плоскостью
*ENDIF
ASEL, S, LOC, Y, PointY(1)
*DO, j, 3, (Ny + 1 - dy) / 2 + 1 ! Цикл по горизонтальным рёбрам
жёсткости
    ASEL, A, LOC, Y, PointY(j) ! Довыбор стенки среднего горизонтального ребра
жёсткости
*ENDDO
ASEL, R, LOC, X, PointX(3), a ! Подвыбор части стенки крайнего горизонтального
ребра жёсткости
WPLANE, -1, 0, 0, tmp, 0, 1, tmp, 1, 1, tmp ! Задание рабочей плоскости по координатам
*GET, aCheck, AREA, 0, COUNT ! Определение количества выбранных поверхностей
*IF, aCheck, GT, 0, THEN ! Если выбрана хотя бы одна поверхность, то

```

```

ASBW,ALL                                ! разбиваем все выбранные поверхности рабочей
плоскостью
*ENDIF
aCheck=
temp=
tmp=
j=
!
! Выделение области приложения давления
Kx = (a - d)*(Nx + 1)/a/2
*IF,nint(Kx),NE,Kx,THEN                ! Если ребро жёсткости не проходит по левой кромке
области приложения давления, то
  ASEL,S,LOC,Y,PointY(1)
  *DO,j,2,(Ny + 1 - dy)/2 + 1 ! Цикл по        горизонтальным рёбрам жёсткости
    ASEL,A,LOC,Y,PointY(j)      ! Довыбор стенки горизонтального ребра жёсткости
  *ENDDO
  ASEL,A,LOC,Z,-dwy2           ! Довыбор пояска крайнего горизонтального ребра жёсткости
  ASEL,A,LOC,Z,-dwy1           ! Довыбор поясков средних горизонтальных рёбер жёсткости
  ASEL,A,LOC,Z,0                ! Довыбор обшивки
  WPLANE,-1,lft,0,0,lft,1,0,lft,1,1 ! Задание рабочей области по координатам
  ASBW,ALL                      ! Разбиение всех выбранных поверхностей рабочей плоскостью
*ENDIF
Kx=
j=
Ky = (b - h)*(Ny + 1)/b/2
*IF,nint(Ky),NE,Ky,THEN                ! Если ребро жёсткости не проходит по нижней кромке
области приложения давления, то
  ASEL,S,LOC,X,PointX(1)
  *DO,i,2,(Nx + 1 - dx)/2 + 1! Цикл по вертикальным рёбрам жёсткости
    ASEL,A,LOC,X,PointX(i)! Довыбор стенки вертикального ребра жёсткости
  *ENDDO
  ASEL,A,LOC,Z,-dwx2           ! Довыбор пояска крайнего вертикального ребра жёсткости
  ASEL,A,LOC,Z,-dwx1           ! Довыбор поясков средних вертикального рёбер жёсткости
  ASEL,A,LOC,Z,0                ! Довыбор обшивки
  WPLANE,-1,0,down,0,1,down,0,1,down,1 ! Задание рабочей области по координатам
  ASBW,ALL                      ! Разбиение всех выбранных поверхностей рабочей плоскостью
*ENDIF
Ky=
i=
ALLSEL,ALL                            ! Выбор всех геометрических и математических элементов
NUMMRG,KP                             ! Объединение дублирующих друг друга точек, линий, поверхностей и
объёмов
AREVERSE,ALL                          ! Инверсия нормалей всех выбранных поверхностей
!=====
! Приложение нагрузки
ASEL,S,LOC,Z,0                        ! Выбор обшивки
ASEL,R,LOC,Y,down,b/2                 ! Подвыбор поверхностей на уровне ледового давления
ASEL,R,LOC,X,lft,a/2                 ! Подвыбор поверхностей на уровне ледового давления
SFA,ALL,1,PRES,p                     ! Приложение ледового давления ко всем выбранным поверхностям со
стороны нормали №1
!=====
! Задание граничных условий
LSEL,S,LOC,X,0                        ! Выбор линий левой кромки
LSEL,A,LOC,Y,0                        ! Довыбор линий нижней кромки
DL,ALL,,UZ                            ! Заделка по оси Oz (отсутствие прогиба контура)
LSEL,S,LOC,X,a/2                      ! Выбор линий вертикальной оси симметрии
DL,ALL,,UX                            ! Задание симметричного граничного условия
DL,ALL,,ROTY                          ! Задание симметричного граничного условия
DL,ALL,,ROTZ                          ! Задание симметричного граничного условия
LSEL,S,LOC,Y,b/2                      ! Довыбор линий горизонтальной оси симметрии
DL,ALL,,UY                            ! Задание симметричного граничного условия
DL,ALL,,ROTX                          ! Задание симметричного граничного условия
DL,ALL,,ROTZ                          ! Задание симметричного граничного условия
ASEL,S,LOC,X,a/2                      ! Выбор поверхностей вертикальной оси симметрии

```

```

DA, ALL, UX          ! Задание симметричного граничного условия
DA, ALL, ROTY       ! Задание симметричного граничного условия
DA, ALL, ROTZ       ! Задание симметричного граничного условия
ASEL, S, LOC, Y, b/2 ! Довыбор поверхностей горизонтальной оси симметрии
DA, ALL, UY         ! Задание симметричного граничного условия
DA, ALL, ROTX       ! Задание симметричного граничного условия
DA, ALL, ROTZ       ! Задание симметричного граничного условия
ALLSEL, ALL         ! Выбор всех геометрических и математических элементов
!=====
! Создание КЭ сетки
AESIZE, ALL, 0.04   ! Задание размера конечного элемента
ASEL, S, LOC, Z, 0   ! Выбор обшивки
AATT, 1, , 1, 0, 1  ! Задание атрибутов выбранным поверхностям
ASEL, S, LOC, X, PointX(2) ! Выбор крайнего вертикального ребра жёсткости
AATT, 1, , 1, 0, 4  ! Задание атрибутов выбранным поверхностям
*DO, i, 3, (Nx + 1 + dx) / 2 ! Цикл по вертикальным рёбрам жёсткости
  ASEL, S, LOC, X, PointX(i) ! Выбор среднего вертикального ребра жёсткости
  AATT, 1, , 1, 0, 2  ! Задание атрибутов выбранным поверхностям
*ENDDO
*IF, dx, EQ, 0, THEN ! Если имеется центральное вертикальное ребро жёсткости, то
  i = (Nx + 1) / 2 + 1 ! вычисляем индекс
  ASEL, S, LOC, X, PointX(i) ! Выбор центрального вертикального ребра жёсткости
  AATT, 1, , 1, 0, 3  ! Задание атрибутов выбранным поверхностям
*ENDIF
i=
ASEL, S, LOC, Y, PointY(2) ! Выбор крайнего горизонтального ребра жёсткости
AATT, 1, , 1, 0, 7  ! Задание атрибутов выбранным поверхностям
*DO, j, 3, (Ny + 1 + dy) / 2 ! Цикл по горизонтальным рёбрам жёсткости
  ASEL, S, LOC, Y, PointY(j) ! Выбор среднего горизонтального ребра жёсткости
  AATT, 1, , 1, 0, 5  ! Задание атрибутов выбранным поверхностям
*ENDDO
*IF, dy, EQ, 0, THEN ! Если имеется центральное горизонтальное ребро жёсткости, то
  j = (Ny + 1) / 2 + 1 ! вычисляем индекс
  ASEL, S, LOC, Y, PointY(j) ! Выбор центрального вертикального ребра жёсткости
  AATT, 1, , 1, 0, 6  ! Задание атрибутов выбранным поверхностям
*ENDIF
j=
ASEL, S, LOC, X, PointX(2) - bfx2/2, PointX(2) + bfx2/2 ! Выбор крайнего вертикального
ребра жёсткости
ASEL, R, LOC, Z, -dwx2 ! Подвыбор пояска
AATT, 1, , 1, 0, 9  ! Задание атрибутов выбранным поверхностям
*DO, i, 3, (Nx + 1 - dx) / 2 + 1 ! Цикл по вертикальным рёбрам жёсткости
  ASEL, S, LOC, X, PointX(i) - bfx1/2, PointX(i) + bfx1/2 ! Выбор среднего вертикального
ребра жёсткости
  ASEL, R, LOC, Z, -dwx1 ! Подвыбор пояска
  AATT, 1, , 1, 0, 8  ! Задание атрибутов выбранным поверхностям
*ENDDO
i=
ASEL, S, LOC, Y, PointY(2) - bfy2/2, PointY(2) + bfy2/2 ! Выбор крайнего горизонтального
ребра жёсткости
ASEL, R, LOC, Z, -dwy2 ! Подвыбор пояска
AATT, 1, , 1, 0, 11 ! Задание атрибутов выбранным поверхностям
*DO, j, 3, (Ny + 1 - dy) / 2 + 1 ! Цикл по горизонтальным рёбрам жёсткости
  ASEL, S, LOC, Y, PointY(j) - bfy1/2, PointY(j) + bfy1/2 ! Выбор среднего
горизонтального ребра жёсткости
  ASEL, R, LOC, Z, -dwy1 ! Подвыбор пояска
  AATT, 1, , 1, 0, 10 ! Задание атрибутов выбранным поверхностям
*ENDDO
j=
ALLSEL, ALL         ! Выбор всех геометрических и математических элементов
AMESH, ALL          ! Разбиение всех выбранных поверхностей
AGEN, , ALL, , , -a/2, -b/2, , , , 1 ! Перемещение всех выбранных поверхностей
/ESHAPE, 1.0        ! Отображение плоских элементов в объёмном виде
/GLINE, 1, -1       ! Не отображать границы элементов

```

```

/EXPAND, 4, POLAR, HALF, , 90 ! Симметричное отображение
/REPLOT
!=====
! Настройка решения и его запуск
/SOLUTION ! Вход в решатель
ANTYPE, STATIC ! Статический тип расчёта
OUTRES, ALL, ALL ! Запись всех элементов решения на каждом его подшаге
NLGEOM, ON ! Учёт зависимости жёсткости от деформации
SOLVE ! Решение текущего шага нагружения
!=====
! Постобработка
/POST1 ! Вход в постобработчик
ETABLE, Vol, VOLU ! Создание таблицы объёмов конечных элементов
ETABLE, S_eqv, S, EQV ! Создание таблицы эквивалентных напряжений конечных элементов
ETABLE, Strn, EPPL, EQV ! Создание таблицы эквивалентных накопленных пластических
деформаций конечных элементов
ETABLE, Sag, U, Z ! Создание таблицы перемещений вдоль оси Oz конечных элементов
*VGET, Volume, ELEM, , ETAB, Vol, , , 2! Формирования вектора объёмов конечных элементов
*VGET, Stress, ELEM, , ETAB, S_eqv, , , 2! Формирование вектора эквивалентных напряжений
конечных элементов
*VGET, Strain, ELEM, , ETAB, Strn, , , 2! Формирование вектора эквивалентных накопленных
пластических деформаций конечных элементов
*VGET, Deflect, ELEM, , ETAB, Sag, , , 2 ! Формирование вектора перемещений вдоль оси Oz
конечных элементов
*VSCFUN, TotalV, SUM, Volume ! Определение суммарного объёма КЭ модели
*VSCFUN, maxStr, MAX, Stress ! Определение наибольшего эквивалентного напряжения
*VSCFUN, StrnMx, MAX, Strain ! Определение наибольшей эквивалентной накопленной
пластической деформации
*VSCFUN, Defl, MIN, Deflect ! Определение наименьшего перемещения вдоль оси Oz
Defl = -Defl ! Вычисления наибольшего прогиба конструкции

/GO ! Продолжение протоколирования последующих команд

```

### Ниже приведён текст файла Model.opt, содержащий комментарии.

```

/OPT ! Вход в оптимизатор
OPANL, 'Model', 'mac' ! Указание оптимизируемого файла
!
!-----
! Задание варьируемых параметров (design variables)
OPVAR, prm01, DV, 5e-3, 50e-3 ! Диапазон изменения толщины обшивки
OPVAR, prm02, DV, 50e-3, 300e-3 ! Диапазон изменения ширины пояска средних
вертикальных рёбер жёсткости
OPVAR, prm03, DV, 50e-3, 600e-3 ! Диапазон изменения высоты стенки средних
вертикальных рёбер жёсткости
OPVAR, prm04, DV, 5e-3, 50e-3 ! Диапазон изменения толщины пояска средних
вертикальных рёбер жёсткости
OPVAR, prm05, DV, 5e-3, 50e-3 ! Диапазон изменения толщины стенки средних
вертикальных рёбер жёсткости
!OPVAR, prm06, DV, 50e-3, 300e-3 ! Диапазон изменения ширины пояска крайних
вертикальных рёбер жёсткости
!OPVAR, prm07, DV, 50e-3, 600e-3 ! Диапазон изменения высоты стенки крайних
вертикальных рёбер жёсткости
!OPVAR, prm08, DV, 5e-3, 50e-3 ! Диапазон изменения толщины пояска крайних
вертикальных рёбер жёсткости
!OPVAR, prm09, DV, 5e-3, 50e-3 ! Диапазон изменения толщины стенки крайних
вертикальных рёбер жёсткости
OPVAR, prm10, DV, 50e-3, 300e-3 ! Диапазон изменения ширины пояска средних
горизонтальных рёбер жёсткости
OPVAR, prm11, DV, 50e-3, 600e-3 ! Диапазон изменения высоты стенки средних
горизонтальных рёбер жёсткости
OPVAR, prm12, DV, 5e-3, 50e-3 ! Диапазон изменения толщины пояска средних
горизонтальных рёбер жёсткости
OPVAR, prm13, DV, 5e-3, 50e-3 ! Диапазон изменения толщины стенки средних
горизонтальных рёбер жёсткости

```

```

!OPVAR,prm14,DV,50e-3,300e-3      ! Диапазон изменения ширины пояска крайних
горизонтальных рёбер жёсткости
!OPVAR,prm15,DV,50e-3,600e-3      ! Диапазон изменения высоты стенки крайних
горизонтальных рёбер жёсткости
!OPVAR,prm16,DV,5e-3,50e-3        ! Диапазон изменения толщины пояска крайних
горизонтальных рёбер жёсткости
!OPVAR,prm17,DV,5e-3,50e-3        ! Диапазон изменения толщины стенки крайних
горизонтальных рёбер жёсткости
!
! Ограничения (state variables)
OPVAR,maxStr,SV,0,ultimS          ! Ограничение наибольшего эквивалентного напряжения
OPVAR,StrnMx,SV,0,delta           ! Ограничение наибольшей пластической деформации
OPVAR,Defl,SV,0,0.03*min(a,b)    ! Ограничение наибольшего прогиба
!
! Целевой параметр (objective)
OPVAR>TotalV,OBJ                  ! Минимизация суммарного объёма конструкции
!
!
! Настройки оптимизатора
OPDATA,Covering,opt               ! Указания файла хранения оптимизированных параметров
OPLOOP,TOP,IGNORE,SCALAR         ! Настройка цикла оптимизации (чтение файла с первой
линии, игнорировать изменение варьируемых параметров в оптимизируемом файле,
сохранять только скалярные параметры)
OPPRNT,FULL                       ! Вывод полной детализации процесса оптимизации
OPKEEP,ON! Сохранять результаты и файлы баз данных для лучшего набора параметров
!
! Выбор метода оптимизации и её запуск
OPTYPE,FIRST                      ! Метод оптимизации первого порядка
OPFRST,20,100,0.2                ! Настройка метода первого порядка (число оптимизационных
итераций, наибольший размер в процентах каждого шага линейного поиска и шаг в
процентах для градиента)
OPEXE                             ! Запуск оптимизации

```